UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01038438 6

UNIV OF
TORONTO
LIBRARY

LEÇONS

SUR

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS

D'UNE VARIABLE RÉELLE

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par EMILE BOREL; 1917 ..... 7 fr. 50

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles*), par EMILE BOREL; 2e édition, 1914 ..... 7 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par EMILE BOREL; 1900 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par EMILE BOREL; 1901 ..... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, par EMILE BOREL, rédigées par *R. d'Adhémar;* 1902 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, par EMILE BOREL, rédigées par *Ludovic Zoretti;* 1903 ..... 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, par HENRI LEBESGUE; 1904 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, par E. BOREL, rédigées par *M. Fréchet*, avec des Notes de P. PAINLEVÉ et de H. LEBESGUE; 1905 ..... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy;* 1905 ..... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1905 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, par H. LEBESGUE; 1906... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, par PIERRE BOUTROUX, avec une Note de PAUL PAINLEVÉ; 1908 ..... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par OTTO BLUMENTHAL; 1910 ..... 5 fr. 50

Leçons sur la théorie de la croissance, par EMILE BOREL, rédigées par *A. Denjoy;* 1910 ..... 5 fr. 50

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL; 1910 ..... 3 fr. 50

Leçons sur le prolongement analytique, par L. ZORETTI; 1910.... 3 fr. 75

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, par VITO VOLTERRA, rédigées par *M. Tomassetti* et *F.-S. Zarlatti;* 1912 ..... 5 fr. 50

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, par P. DIENES; 1913 ..... 5 fr. 50

Leçons sur les fonctions de lignes et leurs applications, par VITO VOLTERRA, rédigées par *J. Pérès;* 1913 ..... 7 fr. 50

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, par FRÉDÉRIC RIESZ; 1913 ..... 6 fr. 50

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, par MAXIME BÔCHER, rédigées par *Gaston Julia;* 1917 ..... 5 fr.

Intégrales de Lebesgue; fonctions d'ensembles; classes de Baire, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN, 1916 ..... 7 fr.

Majoration provisoire : 50 %.

OUVRAGES DE M. ÉMILE BOREL

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie :

Introduction géométrique à quelques théories physiques ..... 5 fr.

LIBRAIRIE HERMANN ET FILS :

Éléments de la théorie des probabilités, 2e édition; 1910 ..... 6 fr.

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN :

L'Aviation (*en collaboration avec* PAUL PAINLEVÉ *et* CH. MAURAIN), 6e édition revue ..... 3 fr. 50

Le Hasard, 3e édition ..... 3 fr. 50

LIBRAIRIE VUIBERT :

Introduction à la théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure (*en collaboration avec* JULES DRACH) ..... 10 fr.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS
SUR
L'APPROXIMATION DES FONCTIONS
D'UNE VARIABLE RÉELLE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE

259014.
10/9/31.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1919

QA
331
.5
L228

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

PRÉFACE.

Quand on se propose d'exprimer une fonction d'une variable réelle sous forme finie, on s'aperçoit rapidement que l'ordre de la meilleure approximation possible est lié à la continuité et aux propriétés différentielles de la fonction, ou, si la fonction est analytique, à la nature et à la situation des points singuliers. C'est l'étude de cette dépendance réciproque qui fait l'objet du présent Volume. J'ai largement profité des recherches faites récemment sur cette question, mais je ne les expose pas. Je traite le sujet en toute liberté et sous la forme synthétique qui m'a paru la meilleure.

Sauf l'addition du Chapitre IX et quelques retouches de détail par ailleurs, ce Livre est la reproduction fidèle des leçons que j'ai eu l'honneur de faire à la Sorbonne en mai et juin 1918. Aussi ai-je contracté une dette de reconnaissance envers MM. les professeurs de la Faculté des Sciences de Paris. Ils ont bien voulu m'accueillir et m'encourager aux jours sombres. L'hospitalité qu'ils m'ont donnée est un honneur dont je m'enorgueillis encore aux jours victorieux. Je leur adresse ici tous mes remercîments. Puisse ce modeste Volume, fait un peu sous leur inspiration, leur porter le témoignage de ma gratitude.

Je remercie, en particulier, M. E. Borel. C'est la deuxième fois qu'il accepte une monographie signée de mon nom dans

la Collection remarquable qu'il dirige. Je ne pouvais pas souhaiter de recommandation plus flatteuse.

Je remercie enfin bien sincèrement la maison Gauthier-Villars et Cie, qui, malgré les sérieuses difficultés de l'heure présente, a entrepris la publication de cet Ouvrage et lui a donné tous les soins.

C. de la Vallée Poussin.

Louvain, juillet 1919.

APPROXIMATION DES FONCTIONS

INTRODUCTION.

THÉORÈMES DE WEIERSTRASS. GÉNÉRALITÉS.

1. Problème de l'approximation. — La question qui va nous occuper dans ces *Leçons* est la suivante : soit $f(x)$ une fonction continue d'une variable réelle x; il s'agit de l'exprimer sous forme finie avec une approximation plus ou moins grande, mais notre étude ne portera que sur deux modes de représentation approchée : *la représentation par polynomes*, et alors la fonction se fait dans un intervalle (a, b); *la représentation trigonométrique*, et alors la fonction $f(x)$ est supposée périodique de période 2π et la représentation s'étend à toutes les valeurs réelles de x.

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n, c'est-à-dire par une somme limitée de la forme

$$\begin{aligned} a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynome de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. On sait, en effet, que les expressions

$$\cos kx, \quad \frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

sont, pour k entier, des polynomes de degré k en $\cos x$. On s'en assure d'ailleurs immédiatement en considérant les formules de récurrence

$$\cos kx + \cos(k-2)x = 2\cos(k-1)x \cos x,$$

$$\frac{\sin(k+1)x + \sin(k-1)x}{\sin x} = 2\cos kx.$$

En particulier, si l'expression trigonométrique d'ordre n est paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynome de degré n en $\cos x$.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Nous pouvons nous donner un polynome de degré n, $P_n(x)$, et le considérer comme une expression approchée de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Nous dirons alors que la différence, positive ou négative,

$$f(x) - P_n(x),$$

est l'*écart* du polynome P_n au point x et que le maximum dans (a, b) de la valeur absolue de cet écart est l'*approximation* fournie par P_n. Le polynome P_n est donc d'autant meilleur, comme polynome approché, qu'il fournit une approximation plus petite. Si nous considérions une fonction périodique $f(x)$ et une représentation trigonométrique approchée de cette fonction, nous définirions l'approximation d'une manière analogue, sauf que nous envisagerions toutes les valeurs réelles de x; mais il suffit pour cela de faire varier x dans une période, c'est-à-dire dans un intervalle d'amplitude 2π.

Le *problème de l'approximation* consiste à former une expression de l'un des deux types précédents telle que l'approximation soit inférieure à un nombre positif donné d'avance, aussi petit que l'on veut. Ce problème est possible dans les deux cas. Il y a là deux théorèmes d'existence, tous deux dus à Weierstrass (1885) et qui ont été le point de départ de la théorie qui va nous occuper. Voici les énoncés de ces théorèmes :

2. Théorèmes de Weierstrass [1]. — I. *Toute fonction continue dans un intervalle (a, b) peut être développée en série uniformément convergente de polynomes dans cet intervalle.*

II. *Toute fonction continue de période 2π peut être développée en série uniformément convergente d'expressions trigonométriques finies.*

---

[1] WEIERSTRASS, *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkurlicher Functionen einer reellen Veranderlichen* (*Sitzungsberichte der Kgl. Ak. der Wiss.*, 1885).

Dans ces deux énoncés, il s'agit de développement en série et non d'approximation sous forme finie, mais les deux problèmes sont les mêmes. En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'approximation par polynomes. Si l'on connaît un développement de $f(x)$ en série uniformément convergente de polynomes, on en déduit un polynome aussi approché qu'on voudra de cette fonction, en sommant un nombre suffisant de termes de cette série. Réciproquement, si l'on a construit une suite de polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ fournissant une suite d'approximations tendant vers zéro, on obtient l'expression de $f(x)$ en série uniformément convergente :

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \ldots.$$

Les théorèmes I et II se ramènent l'un à l'autre, comme nous le verrons. On en a donné aussi un grand nombre de démonstrations directes, dont nous ne ferons pas ici l'historique. Mais nous allons exposer maintenant la démonstration la plus élémentaire que l'on ait donnée jusqu'à présent du théorème I. Elle est due à M. Lebesgue [1].

3. Démonstration de M. H. Lebesgue. — La démonstration que M. H. Lebesgue a donnée du théorème I présente un caractère distinctif. Elle ramène la démonstration du théorème pour $f(x)$ quelconque, à la démonstration du théorème pour la fonction particulière $|x|$. Voici comment se fait cette réduction :

M. Lebesgue observe que l'on peut approcher autant que l'on veut d'une courbe continue à l'aide d'une ligne polygonale. L'approximation d'une fonction continue se ramène donc à celle de l'ordonnée d'une telle ligne. Il reste à ramener l'approximation d'une telle ordonnée à celle de $|x|$.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ les sommets d'une ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses x_1 et x_n. Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

---

[1] *Sur l'approximation des fonctions* (*Bull. de la Soc. math.*, 2e série, t. XXII, novembre 1898).

est nulle pour $x > x_k$ et égale à $2(x - x_k)$ pour $x < x_k$. Posons

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x),$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont n constantes à déterminer. Cette fonction varie linéairement entre deux abscisses consécutives x_k, x_{k+1}. Donc, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit d'amener la coïncidence des n sommets, ou de poser les n conditions :

$$y_i = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ceci constitue un système récurrent qui détermine de proche en proche $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Ainsi $F(x)$ est l'ordonnée de la ligne polygonale. Or l'approximation de $F(x)$ dépend de celle de $\varphi_k(x)$, donc de celle de $|x - x_k|$, donc finalement de celle de $|x|$ dans un certain intervalle.

Il existe bien des méthodes d'approximation de $|x|$. Si l'on se borne au seul théorème d'existence de Weierstrass, la plus simple suffit et c'est encore celle de M. Lebesgue.

Soit donc à représenter $|x|$ en série uniformément convergente de polynomes dans un intervalle (a, b). Le problème ne se pose que si a et b sont de signes contraires, et il suffit évidemment de considérer un intervalle symétrique, par exemple $(-b, +b)$. Si l'on pose alors $x = bt$ (b positif), il suffit de représenter $|t|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

On a, par la formule du binome,

$$\sqrt{1-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2,4}\alpha^2 - \frac{1,3}{2,4,6}\alpha^3 - \ldots,$$

et cette série converge uniformément entre -1 et $+1$. Remplacons α par $1 - t^2$: nous obtenons, dans l'intervalle $(-1, +1)$, le développement cherché

$$|t| = 1 - \frac{1}{2}(1 - t^2) - \frac{1}{2,4}(1 - t^2)^2 - \ldots.$$

Cette démonstration ne va pas au delà du théorème d'existence.

Elle est très intéressante par sa simplicité, mais elle ne fournit qu'une approximation médiocre. Elle se prêterait mal à la recherche d'approximations aussi convergentes que possible, recherche qui fera l'objet des principaux Chapitres de ces *Leçons*.

4. Démonstration du théorème II. — Un grand nombre de démonstrations du théorème II se fondent sur les propriétés des séries de Fourier. Nous rencontrerons, au Chapitre II, celle de M. Fejér. Il est cependant utile d'établir le théorème de Weierstrass indépendamment de cette théorie, et c'est ce que M. Lebesgue a fait [1] en ramenant le théorème II au théorème I.

Voici une démonstration [2] qui s'inspire des mêmes idées que celle de M. Lebesgue, mais qui en diffère par les artifices employés.

Soit $f(x)$ la fonction continue de période 2π, dont il faut faire l'approximation trigonométrique. Considérons les deux fonctions

$$f(x)+f(-x), \qquad [f(x)-f(-x)]\sin x.$$

Ces fonctions, toutes deux paires de période 2π, sont donc des fonctions uniformes de $\cos x = u$ et nous pouvons les désigner par $\varphi(u)$ et $\psi(u)$. Je dis que l'approximation trigonométrique de $f(x)$ revient à celle par polynomes de $\varphi(u)$, de $\psi(u)$ et de deux autres fonctions analogues.

Soient, en effet, $P(u)$ et $Q(u)$ deux polynomes tels que l'on ait approximativement

$$\varphi(u) = P(u), \qquad \psi(u) = Q(u);$$

on aura, avec la même approximation,

$$[f(x)+f(-x)]\sin^2 x = P(\cos x)\sin^2 x,$$
$$[f(x)-f(-x)]\sin^2 x = Q(\cos x)\sin x;$$

d'où, la relation approchée

$$(1) \qquad 2f(x)\sin^2 x = P(\cos x)\sin^2 x + Q(\cos x)\sin x.$$

---

(1) Mémoire cité.

(2) De la Vallée Poussin, *L'approximation des fonctions d'une variable réelle* (*L'Enseignement mathématique*, 20e année, n° 1, 1918).

Recommençons le même calcul avec la fonction $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ au lieu de $f(x)$. Les polynomes $P(u)$ et $Q(u)$ sont remplacés par deux autres $R(u)$ et $S(u)$; d'où la relation approchée

$$(1)\qquad f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x = R(\cos x)\sin^2 x + S(\cos x)\sin x,$$

et, en changeant x en $x-\frac{\pi}{2}$,

$$(2)\qquad f(x)\cos^2 x = R(\sin x)\cos^2 x - S(\sin x)\cos x.$$

Ajoutons maintenant les relations approchées (1) et (2) membre à membre; nous obtenons l'expression trigonométrique approchée de $f(x)$.

5. **Réduction de l'approximation par polynomes à une approximation trigonométrique.** — Nous venons de ramener, avec M. Lebesgue, l'approximation trigonométrique à une approximation par polynomes. On peut aussi faire l'inverse et réduire l'approximation par polynomes à une approximation trigonométrique. C'est ce procédé inverse que nous aurons surtout à utiliser dans ces Leçons. A cet effet, nous ferons grand usage d'un artifice extrêmement simple, dont M. S. Bernstein surtout a montré les avantages [1] et dont il importe de dire un mot dès maintenant.

Soit à représenter par polynomes une fonction continue $f(x)$ dans un intervalle donné. Tout intervalle (a, b) se ramène à $(-1, +1)$ par la substitution linéaire

$$x = a\frac{1-t}{2} + b\frac{1+t}{2}.$$

Supposons qu'elle transforme $f(x)$ en $\varphi(t)$: la représentation de $\varphi(t)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ se transforme dans celle de $f(x)$ dans (a, b) par la substitution linéaire inverse. Ces substitutions transforment un polynome en un autre et n'en altèrent pas le degré. Il suffit donc bien de considérer la représentation d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. Posons, avec M. Bernstein,

$$x = \cos\varphi;$$

---

[1] *Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (*Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*. Collection in-4°. 2e série, t. IV, 1912).

cette substitution transforme $f(x)$ en $f(\cos\varphi)$ qui est une fonction paire de période 2π. Je dis que *l'approximation de $f(x)$ par des polynomes en x et celle de $f(\cos\varphi)$ par des expressions trigonométriques en φ sont deux problèmes complètement équivalents.*

Supposons, en effet, que nous ayons, avec une certaine approximation, la représentation trigonométrique

$$f(\cos\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi;$$

ne contenant que des cosinus (puisque la fonction est paire), et remarquons que $\cos k\varphi$ est un polynome de degré k en $\cos\varphi$,

$$\cos k\varphi = P_k(\cos\varphi);$$

nous avons, avec la même approximation, la représentation par polynome que nous cherchons

$$f(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x).$$

Les polynomes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... sont ce que M. Bernstein appelle des *polynomes trigonométriques*. Ils ont été considérés bien avant lui par le grand mathématicien russe Tchebycheff, qui en a signalé des propriétés remarquables, et nous aurons l'occasion d'y revenir dans la suite.

Réciproquement, une représentation de $f(x)$ par un polynome en x se transforme, en posant $x = \cos\varphi$, dans une représentation trigonométrique de $f(\cos\varphi)$.

6. **Module de continuité.** — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Considérons deux points x_1, x_2 de cet intervalle et formons la différence absolue

$$|f(x_2) - f(x_1)|.$$

Cette différence admet un maximum pour l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) qui satisfont à la condition

$$|x_2 - x_1| \leqq \delta,$$

où δ est un nombre positif donné. Ce maximum est une fonction continue de δ, que nous désignerons par $\omega(\delta)$ et que nous appellerons *module de continuité* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). On

pourrait préférer à cette dénomination celle de *module d'oscillation*, plus naturelle à certains égards [1]; mais nous choisissons la première, parce qu'elle attire mieux l'attention sur l'usage que nous aurons à faire de la notion qu'elle exprime.

D'après sa définition, le module de continuité est donc une fonction continue et non décroissante de δ, qui tend vers zéro avec δ. C'est la rapidité plus ou moins grande de cette convergence quand δ tend vers zéro qui nous intéressera plus particulièrement dans la suite.

Quand $f(x)$ est périodique, le module de continuité se définit de la même façon, mais sans restriction d'intervalle. Dans ces conditions, $\omega(\delta)$ atteint évidemment son maximum pour une valeur de δ égale ou inférieure à l'amplitude de la demi-période, de sorte que ce maximum est $\omega(\pi)$.

Le module de continuité possède quelques propriétés qui sont presque immédiates :

1° *Quel que soit λ entier, on a*

$$\omega(\lambda\delta) \leqq \lambda\omega(\delta).$$

En effet, cette inégalité s'obtient en remplaçant chaque terme par la borne supérieure de son module, sous la condition $|k| \leqq \delta$, dans l'égalité

$$f(x+\lambda h) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} [f(x+kh+h) - f(x+kh)].$$

2° *Quel que soit λ positif (entier ou non)*, on a

$$\omega(\lambda\delta) \leqq (\lambda+1)\omega(\delta).$$

Soit $\lambda+\varepsilon$ l'entier supérieur à λ (supposé non entier); on a

$$\omega(\lambda\delta) \leqq \omega[(\lambda-\varepsilon)\delta] + (\lambda-\varepsilon)\omega(\delta) \leqq (\lambda+1)\omega(\delta).$$

3° *Si $\omega(\delta)$ s'annule pour une valeur non nulle δ_1 de δ, $f(x)$ se réduit à une constante.*

En effet, $\omega(\delta)$ s'annule pour $\delta = \delta_1$, auquel cas, $f(x)$ est constant dans tout intervalle $< \delta_1$, donc aussi dans tout intervalle.

---

[1] Cette observation m'a été faite par M. Lalesco.

7. **Condition de Lipschitz.** — On dit qu'une fonction est *lipschitzienne* ou vérifie une *condition de Lipschitz*, si l'on peut assigner une constante M telle que l'on ait, quels que soient x_1 et x_2,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq M|x_2 - x_1|.$$

Si la fonction $f(x)$ est lipschitzienne, elle est continue et son module de continuité satisfait à la condition

$$\omega(\delta) \leqq M\delta,$$

complètement équivalente à la précédente.

Cette condition est celle de Lipschitz proprement dite. Plus généralement, on dit qu'une fonction $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α ou d'exposant α $(0 < \alpha \leqq 1)$, si l'on a

$$\omega(\delta) \leqq M\delta^\alpha.$$

Ainsi la condition de Lipschitz proprement dite est celle d'ordre 1.

Il n'y a pas lieu de considérer de condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$. Une fonction qui la posséderait se réduirait à une constante. On aurait, en effet, par la propriété 1° du numéro précédent, quel que soit λ entier,

$$\omega(\delta) = \omega\left(\lambda\frac{\delta}{\lambda}\right) \leqq \lambda\omega\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \leqq \lambda M\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^\alpha;$$

et, en faisant tendre λ vers l'infini,

$$\omega(\delta) \leqq \lim \frac{M\delta^\alpha}{\lambda^{\alpha-1}} = 0.$$

CHAPITRE I.

APPROXIMATION PAR LES SÉRIES DE FOURIER.

8. **Séries et constantes de Fourier. Propriété de minimum qui les définit.** — Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable de période 2π. Considérons la suite trigonométrique finie d'ordre n

$$S_n = \frac{1}{2} a_0 - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx - b_k \sin kx).$$

Cette suite s'appelle la *somme de Fourier d'ordre n* relative à $f(x)$, si les coefficients a_k et b_k sont déterminés par la condition de minimer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n]^2 \, dx.$$

Cette intégrale est une expression quadratique positive en a, b, admettant nécessairement un minimum. Pour le réaliser, il faut annuler les dérivées partielles en a et en b, c'est-à-dire poser

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n] \cos kx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n] \sin kx \, dx = 0$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

d'où, sans difficulté,

$$(1) \quad \begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \\ \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Il est important de remarquer que, par suite de la périodicité, l'intervalle d'intégration peut être remplacé par tout autre de même amplitude 2π, sans changer la valeur de ces intégrales.

Les constantes a_k et b_k déterminées par les formules (1) sont les *constantes de Fourier* de $f(x)$. La série illimitée

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

considérée au point de vue purement formel, qu'elle soit convergente ou non, est la *série de Fourier de* $f(x)$. La somme S_n est celle des $n+1$ premiers termes de cette série.

L'expression des constantes de Fourier, sous forme d'intégrales définies par les formules (1), conduit immédiatement à quelques conséquences fondamentales :

1° *Si le module de* $f(x)$ *ne surpasse pas* M, *celui des constantes de Fourier ne surpasse pas* 2M.

2° *Les constantes de Fourier de* $f+\varphi$ *sont les sommes des constantes de Fourier du même ordre de* f *et de* φ. *La série de Fourier de* $f+\varphi$ *est la somme terme à terme des séries de* f *et de* φ.

9. **Conséquences du théorème de Weierstrass.** — Le théorème II de Weierstrass (n° 2) entraîne d'autres propriétés également fondamentales des constantes et des sommes de Fourier. Indiquons-les :

1° *Si* $f(x)$ *de période* 2π *est continue, on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_n|^2 dx = 0.$$

En effet, d'après Weierstrass, on peut définir une expression trigonométrique T_n, d'ordre n et donnant une approximation ε_n qui tend vers zéro avec $1:n$. Donc, puisque S_n minime l'intégrale, on a

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2 dx \leqq \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx \leqq \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^2 dx.$$

Le dernier membre de ces inégalités tend vers zéro avec $1:n$, donc *a fortiori* le premier.

2° *Si $f(x)$ est continue, la série positive*

$$\sum_0^\infty (a_k^2 + b_k^2)$$

est convergente et a pour somme

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx.$$

En effet, faisons la décomposition

$$\int_0^{2\pi} [f - S_n]^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2\,dx - 2\int_0^{2\pi} f S_n\,dx + \int_0^{2\pi} S_n^2\,dx.$$

On a, par les formules (1),

$$\int_0^{2\pi} f S_n\,dx = \sum_0^n \int_0^{2\pi} f(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,dx = \pi \sum_0^n (a_k^2 + b_k^2).$$

D'autre part, on a, en développant S_n,

$$\int_0^{2\pi} S_n^2\,dx = \sum_0^n \int_0^{2\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2\,dx = \pi \sum_0^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2\,dx - \pi \sum_0^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Quand n tend vers l'infini, le premier membre tend vers zéro (par 1°), donc le second membre aussi, ce qui prouve la proposition.

On remarquera que l'on tire maintenant de la dernière équation

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2\,dx = \pi \sum_{n+1}^\infty (a_k^2 + b_k^2).$$

3° *Si les constantes de Fourier d'une fonction continue sont toutes nulles, la fonction est identiquement nulle.*

En effet, on a, par la propriété 2°,

$$\int_0^{2\pi} f^2\,dx = 0,$$

ce qui n'a lieu pour f continue que si $f = 0$.

Cette proposition entraîne immédiatement la suivante :

4° *Deux fonctions continues qui ont les mêmes constantes de Fourier sont identiques.*

5° *Si la série de Fourier d'une fonction continue f est uniformément convergente dans la période, donc, en particulier, si les séries positives* $\Sigma|a_k|$ et $\Sigma|b_k|$ *convergent, la série de Fourier a pour somme f.*

En effet, la somme de la série est une fonction continue et périodique φ. Comme la série est intégrable terme à terme, les constantes de Fourier de φ [qui se calculent par les formules (1)] sont les mêmes que celles de f ; donc $f = \varphi$ (par 4°).

6° *Si une expression trigonométrique* T_n *d'ordre n fournit une approximation ρ_n, on a nécessairement*

$$\rho_n \geq \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)},$$

ce qui fournit une première borne inférieure de la meilleure approximation possible (1).

En effet, puisque S_n minime l'intégrale, on a (2°)

$$\int_0^{2\pi}(f - T_n)^2\,dx \geq \int_0^{2\pi}(f - S_n)^2\,dx = \pi\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2);$$

et, puisque T_n donne l'approximation ρ_n,

$$\int_0^{2\pi}(f - T_n)^2\,dx \leq \int_0^{2\pi}\rho_n^2\,dx = 2\pi\rho_n^2.$$

---

(1) S. BERNSTEIN, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 52) (*Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. IV, 1912). Nous avons rétabli le facteur $\frac{1}{2}$ qui manque ici sous le radical.

La comparaison des deux bornes ainsi obtenues justifie le théorème énoncé.

10. Dérivation des séries de Fourier. *Si f de période 2π admet une dérivée d'ordre r bornée et intégrable, la série de Fourier de $f^{(r)}$ s'obtient en dérivant r fois terme à terme celle de f.*

Il suffit de faire la preuve pour le premier ordre, donc de vérifier que la série dérivée

$$\sum_1^\infty k(-a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

est la série de Fourier de f', donc de vérifier que ses coefficients sont bien les constantes de Fourier A_0, A_k et B_k de f'.

On a, en intégrant par parties, et à cause de la périodicité,

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\,dx = \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] = 0,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f' \cos kx\,dx = \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f \sin kx\,dx = kb_k,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f' \sin kx\,dx = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f \cos kx\,dx = -ka_k.$$

La vérification est donc faite.

11. Théorème. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans un intervalle fini (a, b); si λ tend vers l'infini d'une manière quelconque, on a*

$$\lim_{\lambda=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda=\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Il suffira de considérer la première intégrale. Posons

$$I = \int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Substituons dans cette intégrale $x + \frac{\pi}{\lambda}$ à x et ajoutons l'intégrale

transformée à la précédente : il vient

$$(1) \quad \int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \varphi\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]\cos\lambda x\,dx$$

$$- \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a \varphi\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx.$$

Chacune de ces trois intégrales tend vers zéro quand λ tend vers l'infini : la première avec la fonction à intégrer et les deux dernières avec l'amplitude de l'intervalle d'intégration.

Le théorème précédent subsiste si $\varphi(x)$ admet un nombre limité de points de discontinuité, même sans supposer $\varphi(x)$ bornée, mais moyennant l'existence de l'intégrale

$$\int_a^b |\varphi|\,dx.$$

On peut admettre que φ n'est discontinue qu'aux limites a et b, car l'intégrale se décompose en plusieurs autres vérifiant cette condition. Alors, quelque petit que soit ε positif donné, on peut se donner un η positif assez petit pour que les deux intégrales :

$$\int_a^b |\varphi|\,dx, \quad \int_{a+\eta}^{b-\eta} |\varphi|\,dx$$

diffèrent au plus de ε, auquel cas les deux suivantes :

$$\int_a^b \varphi\cos\lambda x\,dx, \quad \int_{a+\eta}^{b-\eta} \varphi\cos\lambda x\,dx$$

diffèrent au plus de ε, quel que soit λ. Il suffit donc de démontrer le théorème pour la seconde, dans laquelle φ est continue, ce qui ramène au cas précédent (1).

12. Ordre de grandeur des constantes de Fourier. — 1° *Si la*

(1) M. Lebesgue a démontré que le théorème subsiste sous la seule condition que φ soit sommable. (*Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 61).

fonction $f(x)$ de période 2π est continue et admet le module de continuité $\omega(\delta)$, ses constantes de Fourier a_m et b_m tendent vers zéro pour $m = \infty$ (en vertu du théorème précédent) et l'on a

$$|a_m| \leqq \omega\left(\frac{\pi}{m}\right), \qquad |b_m| \leqq \omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Il suffira de faire la démonstration pour a_m.

Recommençons le calcul de la démonstration précédente. Nous aurons, par le changement de x en $x + \frac{\pi}{m}$ et sans toucher aux limites (à cause de la périodicité),

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{m}\right)\cos mx\,dx;$$

puis, en faisant la demi-somme,

$$a_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{m}\right)\right]\cos mx\,dx.$$

Donc, par le théorème de la moyenne,

$$|a_m| \leqq \frac{1}{2\pi}\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)\int_0^{2\pi} dx = \omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

2° *Si $f(x)$ de période 2π possède une dérivée d'ordre r et que celle-ci admette le module de continuité $\omega_r(\delta)$, on a*

$$|a_m| \leqq \frac{1}{m^r}\omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right), \qquad b_m \leqq \frac{1}{m^r}\omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

En effet, les constantes de Fourier de $f^{(r)}(x)$ sont, à l'ordre et au signe près (n° 10), $m^r a_m$ et $m^r b_m$. Or elles sont de module $\leqq \omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right)$, en vertu de la proposition 1°, d'où la proposition actuelle.

Voici déjà quelques applications très simples de ces principes.

Si la série positive $\Sigma(|a_m| + |b_m|)$ converge, la série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$ (n° 9) et l'approximation fournie par la somme de Fourier S_n est inférieure à

$$\sum_{n+1}^{\infty}(|a_h| + |b_h|).$$

Considérons quelques cas particuliers :

Si $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α, on a (par 1°)

$$\sum (|a_m| + |b_m|)^2 > \sum \frac{1}{m} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 < M \sum \frac{1}{m^{1+\alpha}},$$

où M est une constante convenable. Cette série est convergente, donc la série de Fourier converge vers $f(x)$. Ce critérium rentre dans d'autres plus généraux que nous rencontrerons plus loin.

Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable, on a (par 2°), quel que soit r entier,

$$\sum_{n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < M_r \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} < \frac{M_r}{rn^r},$$

où M_r est une constante par rapport à n. Donc, quand n tend vers l'infini, l'approximation fournie par la somme S_n de Fourier est infiniment petite d'ordre supérieur à toute puissance de $1 : n$.

13. Sommation de la série de Fourier et de la série conjuguée par des intégrales définies. — Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable de période 2π. En même temps que la série de Fourier de $f(x)$,

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

il est utile de considérer celle qui s'en déduit par la permutation des coefficients a, b et le changement de signe de x. Cette nouvelle série, que l'on appelle la *série conjuguée* de celle de Fourier, est donc la suivante :

$$\sum_1^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Les sommes d'ordre n de ces deux séries sont respectivement :

$$S_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$S'_n = \sum_1^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Par la substitution des valeurs (1) des constantes de Fourier, ces sommes se transforment dans les intégrales

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k(t-x)\right] f(t)\,dt,$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_1^n \sin k(t-x)\right] f(t)\,dt.$$

Changeons t en $t+x$, sans toucher aux limites (à cause de la périodicité), il vient

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt\right] f(t+x)\,dt.$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_1^n \sin kt\right] f(t+x)\,dt.$$

L'intervalle d'intégration peut être remplacé par tout autre de même amplitude 2π, en particulier par $(-\pi, -\pi)$. Ceci fait, les intégrales entre $-\pi$ et zéro se ramènent à des intégrales entre zéro et π, par le changement de t en $-t$, et il vient ainsi

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt\right][f(x+t) + f(x-t)]\,dt,$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_1^n \sin kt\right][f(x+t) - f(x-t)]\,dt.$$

Si l'on sépare le réel et l'imaginaire dans la relation

$$\frac{1}{2} + \sum_1^n e^{kti} = \frac{e^{(n+1)ti} - 1}{e^{ti} - 1} \qquad \frac{1}{2} = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})ti} - \cos\frac{1}{2}t}{2i\sin\frac{1}{2}t},$$

on obtient

$$(2) \qquad \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

$$(3) \qquad \sum_1^n \sin kt = \frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

Il vient, par la substitution de ces valeurs,

$$(4)\qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,$$

$$(5)\qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)-f(x-t)]\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

La convergence de la série de Fourier et de sa conjuguée sont liées à la convergence des intégrales précédentes pour $n=\infty$. Nous renverrons aux Ouvrages classiques pour l'étude des critériums de convergence les plus généraux. Nous n'indiquerons ici que le plus important, qui est le suivant :

14. Critérium de convergence des séries précédentes. — *Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π. La série de Fourier de $f(x)$ et sa conjuguée seront toutes les deux convergentes au point x, si, ε positif étant donné, l'intégrale*

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$$

a une valeur finie. Dans ce cas, la série de Fourier a pour somme $f(x)$ et sa conjuguée a pour somme l'intégrale (existant par hypothèse)

$$(6)\qquad f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)-f(x-t)]\cot\tfrac{1}{2}t\,dt.$$

En intégrant les deux membres de la formule (2) au numéro précédent, il vient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = 1;$$

donc, en multipliant cette relation par $f(x)$, puis en retranchant l'équation (4) du résultat, il vient

$$f(x)-S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

Pour établir la première partie du théorème, c'est-à-dire que la série de Fourier converge vers $f(x)$, il faut montrer que cette intégrale tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Mais c'est la conséquence du théorème général du n° 11, pourvu que l'intégrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt$$

existe. Reste seulement à démontrer cette existence.

A cet effet, on observe que l'intégrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| dt$$

existe par hypothèse. Or on n'altère pas cette conclusion en étendant l'intégration de 0 à π (puisque f est continue), ni en multipliant la fonction à intégrer par la fonction continue

$$\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

On retrouve alors l'intégrale dont il faut prouver l'existence. Passons à la seconde partie du théorème.

L'existence de l'intégrale (6) se justifie par un raisonnement tout pareil à celui que nous venons de faire. En retranchant alors l'équation (5) de (6), on trouve

$$f_1(x) - S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t\, dt.$$

Pour prouver que la série conjuguée converge vers $f_1(x)$, il faut prouver que cette intégrale tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Mais c'est encore une fois la conséquence du théorème du n° 11, parce que l'intégrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt$$

existe, par la condition supposée dans l'énoncé du théorème.

Il y a lieu d'observer que ladite condition a lieu en tout point où $f(x)$ a une dérivée finie. Elle a lieu partout, si $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz d'un ordre α si petit qu'il soit.

Nous pouvons maintenant établir les théorèmes concernant l'approximation par les séries de Fourier.

15. Théorème I. — *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes* A *et* B *jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ est une fonction périodique et intégrable de module* $< M$, *les deux sommes* S_n *et* S'_n *sont toutes deux de module inférieur à*

$$M(A \log n + B),$$

quel que soit n *entier positif.*

Il suffit de démontrer que la condition peut se réaliser pour chacune des deux sommes.

Commençons par S_n. On a, par la formule (4),

$$|S_n| < \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt < \frac{M}{2} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} \right| dt$$

$$< M \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt < M \int_0^1 dt + M \int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{dt}{t}$$

$$< M\left[1 + \log\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] < M(1 + \log n + \log 2\pi).$$

Cette dernière parenthèse est de la forme $A \log n + B$.

Passons à S'_n. On a, par la formule (5),

$$|S'_n| < \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt$$

$$< \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{n}{2}t \sin\frac{n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt < \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt.$$

Cette intégrale est la même que l'autre, sauf que n est remplacé par $\frac{n}{2}$ et qu'il y a un facteur 2 en plus. Il suffira de doubler les valeurs précédentes de A et de B.

Il est facile d'abaisser les valeurs de A et de B fournies par les calculs qui précèdent, mais cela n'a pas actuellement d'intérêt.

16. Théorème II. — *Supposons $f(x)$ périodique et intégrable*

et désignons par R_n *la différence* $f(x) - S_n$. *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes* A *et* B *tels que, si* $f(x)$ *est de module* $< M$, *on ait, quel que soit* n,

$$|R_n| < M(A \log n + B).$$

Ce théorème n'est pas distinct du précédent. On a

$$|R_n| \geq |f| + |S_n| \geq M - |S_n|.$$

Il suffit donc d'ajouter une unité à la valeur de B trouvée ci-dessus.

M. Lebesgue [1] a déduit du théorème précédent une conséquence de la plus haute importance. C'est une seconde règle [2] qui donne une borne inférieure de la meilleure approximation d'ordre n quand on connaît le développement de Fourier de la fonction à représenter. Voici cette règle :

17. Règle de M. Lebesgue. — *Si l'approximation de* $f(x)$ *par une suite de Fourier d'ordre* n *est égale à* $\varphi(n)$, *la meilleure approximation trigonométrique du même ordre est au moins égale à*

$$\frac{\varphi(n)}{A \log n + B},$$

où A *et* B *sont les deux nombres assignés dans le théorème précédent.*

Soient S_n la somme de Fourier donnant l'approximation $\varphi(n)$ et T_n une seconde expression d'ordre n donnant l'approximation φ_n. Considérons la décomposition

$$f = (f - T_n) - T_n.$$

Soit Σ_n la somme de Fourier de $f - T_n$, nous en concluons

$$S_n = \Sigma_n + T_n,$$
$$|f - S_n| = |(f - T_n) - \Sigma_n|.$$

Comme Σ_n est la somme de Fourier de $f - T_n$ qui est de

---

(1) *Sur les intégrales singulières* (*Ann. Fac. des Sc. de Toulouse*, 1910).
(2) *Voir* la première au n° 9 (6°).

module $\leq \varrho_n$, nous avons, par le théorème précédent,

$$|f - T_n| = |\Sigma_n| \leq \varrho_n (A \log n + B);$$

et, comme d'autre part $|f - S_n|$ atteint la valeur $\varphi(n)$, nous devons en conclure

$$\varphi(n) \leq \varrho_n (A \log n + B).$$

De là résulte la borne inférieure assignée à ϱ_n.

18. Théorème III. — *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes* A *et* B *jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r intégrable et de module $\leq M_r$, on a*

$$|R_n| = |f(x) - S_n| \leq (A \log n + B) \frac{M_r}{n^r}.$$

Supposons d'abord r pair et soit $r = 2q$.

La série de Fourier de $f^{(r)}(x)$ s'obtient en dérivant $r = 2q$ fois celle de $f(x)$, à savoir

$$f(x) = \sum_0^\infty A_k, \qquad A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

laquelle converge par le critérium du n° 14. La série dérivée (qui peut être convergente ou non) sera

$$\sum_1^\infty B_k, \qquad B_k = (-1)^q k^r A_k.$$

Donc, en remplaçant A_k par sa valeur tirée de cette dernière formule, nous obtenons

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty A_k = (-1)^q \sum_{n+1}^\infty \frac{B_k}{k^r}.$$

Soit σ_k la somme d'ordre k de la série de Fourier de $f^{(r)}(x)$, de sorte que

$$B_k = \sigma_k - \sigma_{k-1};$$

il vient

$$(-1)^q R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^r} = \frac{\sigma_n}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^\infty \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right) \sigma$$

Mais, en vertu du théorème I, on a

$$|\sigma_k| < M_r(A \log k + B);$$

il vient donc

$$\frac{|R_n|}{M_r} < \frac{A \log n + B}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right)(A \log k + B)$$

$$= \frac{A \log n + 2B}{(n+1)^r} + A \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right) \log k.$$

La dernière somme (qui est multipliée par A) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\log(n+1)}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^r} \log \frac{k-1}{k}$$

$$< \frac{\log(n+1)}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^r} < \frac{\log(n+1)}{(n+1)^r} + \frac{1}{rn^r} < \frac{\log n + 1}{n^r}.$$

Il vient donc *a fortiori*

$$|R_n| < \frac{2A \log n + (2B+1)}{n^r} M_r.$$

C'est la relation à démontrer : $2A$ et $2B+1$ sont deux nombres fixes que l'on peut désigner de nouveau par A et B.

Supposons, en second lieu, r impair et de la forme $2q+1$ (où q peut être nul).

La série de Fourier de $f^{(r)}(x)$, qui s'obtient par $2q+1$ dérivations, sera, dans ce cas-ci,

$$\sum_1^{\infty} B_k, \qquad B_k = (-1)^q(-a_k \sin kx + b_k \cos kx)k^r.$$

Donc la série conjuguée de la série de Fourier de $f^{(r)}(x)$ sera

$$\sum_1^{\infty} B'_k, \qquad B'_k = (-1)^q k^r A_k.$$

En remplaçant A_k par sa valeur tirée de cette dernière formule, nous obtenons

$$R_n = (-1)^q \sum_1^{\infty} \frac{B'_k}{k^r}.$$

La démonstration s'achève exactement comme dans le cas précédent. En effet, soit σ_k la somme d'ordre k de la série ΣB_k; on a

$$B_k = \sigma'_k - \sigma'_{k-1}$$

et, en vertu du théorème I, la somme σ'_k satisfait (comme σ_k) à la condition

$$|\sigma_k| < M_r(A \log k + B).$$

Il n'y a donc qu'à accentuer σ dans la démonstration précédente.

Le théorème que nous venons d'établir rentre en partie dans un théorème de M. Bernstein [1] et celui de M. Bernstein est lui-même un cas particulier du théorème V qui suit. La considération de la série conjuguée, qui n'intervient pas dans l'analyse de M. Bernstein, permet de simplifier beaucoup les démonstrations.

Nous avons montré dans les deux théorèmes précédents comment l'approximation par les sommes de Fourier est liée au module maximum de la fonction ou de ses dérivés supposées existantes. Nous allons maintenant montrer comment l'approximation est liée au module de continuité des mêmes fonctions. Ce sera l'objet des deux théorèmes suivants.

19. **Théorème IV.** — *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes* A *et* B *jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet le module de continuité $\omega(\delta)$, on a*

$$|R_n| < (A \log n + B)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Nous allons rattacher ce théorème aux théorèmes II et III par un procédé de raisonnement que M. Dunham Jackson a employé dans un cas analogue [2].

Soit δ une partie aliquote de la période 2π. Marquons, sur la courbe $y = f(x)$, les points d'ordonnée $\lambda\delta$, où λ parcourt la suite

---

[1] *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (Mém. cité, n° 59). La démonstration de M. Bernstein concerne la représentation par polynomes trigonométriques et ne comporte pas que A et B soient des constantes absolues.

[2] *Dissertation inaugurale*, Gottingen, 1911. Démonstration du théorème V (p. 40).

des valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Considérons le polygone inscrit qui a ces points pour sommets; l'ordonnée de ce polygone est une fonction $\psi(x)$ de période 2π. Sur chaque côté du polygone, cette fonction est linéaire et son oscillation est $\leqq \omega(\delta)$. Comme sa dérivée ψ' est constante sur chaque côté, on a, sur chacun d'eux (et, par conséquent, partout),

$$|\psi'| \leqq \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

D'autre part, sur le côté limité aux abscisses $\lambda\delta$ et $\lambda\delta + \delta$, la différence $f - \psi$, au point x, est comprise entre

$$f(x) - f(\lambda\delta) \quad \text{et} \quad f(x) - f(\lambda\delta + \delta);$$

on a donc aussi partout

$$|f - \psi| \leqq \omega(\delta).$$

Considérons maintenant la décomposition

$$f = (f - \psi) + \psi.$$

La série de Fourier de f est la somme de celles de $f - \psi$ et de ψ. Soient R_n, R'_n, R''_n les écarts relatifs à ces trois séries, respectivement; nous avons

$$R_n = R'_n + R''_n.$$

Mais, comme $|f - \psi| \leqq \omega(\delta)$, nous avons, par le théorème II,

$$|R'_n| \leqq (A \log n + B)\omega(\delta);$$

et, comme $|\psi'| \leqq \frac{\omega(\delta)}{\delta}$, nous avons, par le théorème III,

$$|R''_n| \leqq (A \log n + B)\frac{\omega(\delta)}{n\delta}.$$

D'ailleurs, on peut satisfaire aux théorèmes II et III avec les mêmes valeurs de A et de B; nous avons donc

$$|R_n| \leqq (A \log n + B)\left(1 + \frac{1}{n\delta}\right)\omega(\delta).$$

Prenons $\delta = \frac{\pi}{n}$, ce qui est bien une partie de la période; nous

obtenons

$$|R_n| < \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)(A \log n + B)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

C'est le théorème à démontrer : les valeurs A et B de l'énoncé s'obtiennent en multipliant par $\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$ celles de la démonstration.

20. Critérium de convergence de Dini-Lipschitz. — Ce critérium est un corollaire du théorème précédent. Il est plus précis que celui du n° 14. En voici l'énoncé :

Si le module de continuité de $f(x)$ satisfait à la condition dite de Dini-Lipschitz,

$$\lim_{\delta = 0} \omega(\delta) \log \frac{1}{\delta} = 0,$$

la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$.

En effet, en faisant $\delta = \frac{\pi}{n}$, cette condition nous donne

$$\lim_{n = \infty} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \log n = 0.$$

Dans ce cas, on a *uniformément*, par le théorème IV,

$$\lim_{n = \infty} R_n = 0.$$

21. Théorème V. — *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes* A *et* B *jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r et que celle-ci admette le module de continuité $\omega_r(\delta)$, on a*

$$|R_n| < (A \log n + B)\frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème IV. Soit δ une partie aliquote de 2π. Inscrivons un polygone dans la courbe $y = f^{(r)}(x)$ en prenant pour sommets les points d'abscisses $\lambda\delta$ (λ entier). Soit $\psi(x)$ l'ordonnée de ce polygone : nous avons, comme dans la démonstration rappelée,

$$|f^{(r)} - \psi| < \omega_r(\delta), \qquad |\psi'| < \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Considérons le développement de ψ en série de Fourier convergente (n° 14)

$$\psi = \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx);$$

nous avons, puisque $f^{(r-1)}$ est périodique,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\psi - f^{(r)})\, dx;$$

d'où, par le théorème de la moyenne,

$$|\alpha_0| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi - f^{(r)}|\, dx \leqq \omega_r(\delta).$$

Désignons maintenant par $F(x)$ la somme de la série trigonométrique obtenue en intégrant r fois de suite la série

$$\sum_1^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

sans introduire de constantes, de sorte que $F(x)$ est une fonction périodique, dont les dérivées d'ordre r et d'ordre $r+1$ satisfont respectivement aux conditions

$$F^{(r)} = \psi - \alpha_0, \qquad F^{(r+1)} = \psi';$$

d'où, par les inégalités précédentes,

$$|(f - F)^{(r)}| = |f^{(r)} - \psi + \alpha_0| \leqq 2\omega_r(\delta),$$
$$|F^{(r+1)}| = |\psi'| \leqq \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Faisons maintenant la décomposition $f = (f - F) + F$ et soient R_n, R'_n, R''_n les restes des séries de Fourier de f, $f - F$ et F respectivement; nous avons

$$R_n = R'_n + R''_n.$$

Mais $f - F$ admet une dérivée d'ordre r, de module $\leqq 2\omega(\delta)$; donc, par le théorème IV,

$$|R'_n| \leqq (A \log n + B)\frac{2\omega_r(\delta)}{n^r}.$$

D'autre part, F admet une dérivée d'ordre $r+1$, de module

$\leqq \omega(\delta) : \delta$; par conséquent,

$$|R_n| \leqq (A \log n + B) \frac{1}{n^{r-1}} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Nous en concluons

$$|R_n| \leqq (A \log n + B)\left(2 + \frac{1}{n\delta}\right) \frac{\omega_r(\delta)}{n^r};$$

et, en faisant $\delta = \frac{\pi}{n}$,

$$|R_n| \leqq \left(2 + \frac{1}{\pi}\right)(A \log n + B) \frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}.$$

On obtient donc les valeurs de A et de B qui conviennent à l'énoncé, en multipliant par $\left(2 + \frac{1}{\pi}\right)$ celles utilisées dans la démonstration.

22. **Remarque.** — Supposons que $f(x)$ admette une dérivée continue d'ordre $r - 1$ et que celle-ci satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre 1, à savoir

$$\omega_{r-1}(\delta) \leqq M_r \delta.$$

On peut dire encore que $f(x)$ a une dérivée d'ordre r de module $\leqq M_r$, sans supposer, pour cela, l'existence et l'intégrabilité de cette dérivée. On a, par le théorème précédent,

$$|R_n| \leqq (A \log n + B)\pi \frac{M_r}{n^r}.$$

Le théorème III subsiste donc sans supposer la dérivée d'ordre r existante et intégrable. La distinction entre les deux cas disparaîtrait d'ailleurs si l'on faisait usage de l'intégrale de Lebesgue.

23. **Dérivabilité.** — La dérivée d'une somme S_n de Fourier est la somme de Fourier de la dérivée $f'(x)$ supposée bornée et intégrable. Donc les dérivées successives de la série de Fourier de $f(x)$ représentent les dérivées successives de $f(x)$ aussi longtemps que ces dérivées sont exprimables en série de Fourier, donc indéfiniment si toutes les dérivées existent. Ainsi *la série de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable est une représentation indéfiniment dérivable de cette fonction*, et la meilleure que l'on connaisse dans ce cas.

CHAPITRE II.

APPROXIMATION PAR LES SOMMES DE FEJÉR.

14. **Sommes de Fejér.** — Les théorèmes précédents et, en particulier le théorème III, ne donnent pas la démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation trigonométrique des fonctions continues. Aucune démonstration de ce théorème n'est plus élégante que celle de M. Fejér. Nous donnerons ici, à cette démonstration, la forme qui convient le mieux à notre objet.

La méthode de M. Fejér consiste à sommer la série de Fourier par le procédé de la moyenne arithmétique. Désignons par σ_n la moyenne arithmétique des n premières sommes de Fourier, à savoir

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}.$$

Cette moyenne est une expression trigonométrique d'ordre $n - 1$ au plus. Nous dirons que c'est la *somme de Fejér d'indice n*. Elle revient à une intégrale, analogue à celle de Dirichlet, que nous appellerons *intégrale de Fejér* et que nous allons former. Nous avons

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{dt}{2\sin\frac{1}{2}t}\sum_0^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.$$

Cette sommation s'effectue par la formule

$$\sin\frac{t}{2}\sum_0^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \sum_0^{n-1}\frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{2} = \frac{1-\cos nt}{2};$$

d'où l'*intégrale de Fejér*

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{1-\cos nt}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}dt.$$

Remplaçant $1 - \cos nt$ par $2\sin^2\frac{nt}{2}$, puis t par $2t$, elle prend la forme

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} f(x-2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Appliquons-lui un procédé de transformation que nous aurons encore l'occasion d'utiliser plus tard. Substituons sous le signe l'intégration le développement

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+k\pi)^2};$$

intégrons terme à terme et observons que $f(x-2t)\sin^2 nt$ admet la période π; il vient, en prenant $t+k\pi$ comme nouvelle variable t dans chaque terme,

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 dt;$$

et, en changeant t en $\frac{t}{n}$,

$$(1) \qquad \sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x-\frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Ce sera l'expression définitive de l'intégrale de Fejér.

Il y a lieu d'observer que, si $f = 1$, les sommes S_k et, par suite, σ_n sont égales à l'unité; donc

$$(2) \qquad 1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

25. Propriétés fondamentales des sommes de Fejér. — Supposons que le module de f ne surpasse pas M et appliquons à l'intégrale de Fejér le théorème de la moyenne; ceci est permis, parce que le facteur $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ est positif, ce qui n'avait pas lieu pour le facteur analogue dans l'intégrale de Dirichlet. Il vient

$$|\sigma_n| \leqq \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = M,$$

d'où le théorème suivant, qui est fondamental :

Toute somme de Fejér a une valeur intermédiaire entre les diverses valeurs de $f(x)$. En particulier, le module d'une somme de Fejér quelconque ne surpasse pas le module maximum de cette fonction.

Revenons maintenant à l'équation (2); multiplions-la par $f(x)$ et soustrayons-la de l'équation (1). Il vient

$$\sigma_n - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right)-f(x)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Par conséquent, si f admet le module de continuité $\omega(\delta)$,

$$(3)\qquad f(x) - \sigma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Pour former une majorante de cette intégrale, partageons l'intervalle d'intégration en trois parties $(0, 1)$, $(1, N)$ et (N, ∞). En majorant dans chaque intervalle, nous obtenons comme borne de l'approximation

$$\frac{2}{\pi}\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right)+\int_1^N\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^2}+\omega(\pi)\int_N^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right]$$

et, en majorant davantage (n° 6, 2°),

$$\frac{2}{\pi}\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right)+\omega\left(\frac{2}{n}\right)\int_1^N\frac{t+1}{t^2}\,dt+\frac{\omega(\pi)}{N}\right]$$
$$<\frac{2}{\pi}\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right)(2+\log N)+\frac{\omega(\pi)}{N}\right].$$

Prenant enfin $N = 1 : \omega\left(\frac{2}{n}\right)$, nous obtenons comme borne supérieure de l'approximation

$$|f-\sigma_n| < \frac{2}{\pi}\omega\left(\frac{2}{n}\right)\left[2+\left|\log\omega\left(\frac{2}{n}\right)\right|+\omega(\pi)\right].$$

Si f est continue, cette expression tend vers zéro quand n tend vers l'infini, et nous avons obtenu la démonstration annoncée du théorème II de Weierstrass.

La borne de l'approximation qui précède présente peu d'intérêt. L'approximation est plus intéressante à considérer dans le cas

particulier où f vérifie une condition de Lipschitz d'ordre donné α $(0 < \alpha < 1)$.

Il existe, dans ce cas, une constante M qui dépend de f et satisfait à la condition

$$\omega(\delta) \leqq M\delta^{\alpha}.$$

La relation (3) nous donne, dans ce cas,

$$|f(x) - \sigma_n| \leqq \frac{2^{\alpha} M}{n^{\alpha}} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Comme cette intégrale existe et a une valeur purement numérique, nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui est dû à M. Bernstein [1] :

Si f satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre α :

$$\omega(\delta) \leqq M\delta^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

on a

$$|f(x) - \sigma_n| \leqq \frac{AM}{n^{\alpha}},$$

où A est une constante numérique qui peut être assignée une fois pour toutes quand α est donné.

26. Expression d'une somme trigonométrique finie au moyen de deux sommes de Fejér. — Soit $T(x)$ une expression trigonométrique d'ordre n. Désignons ses sommes de Fourier par $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$ et ses sommes de Fejér par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. Les sommes de Fourier s_k deviennent identiques à T dès que l'indice k est $\geqq n$. L'identité

$$(n+p)\sigma_{n+p} = (s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}) + (s_n + \ldots + s_{n+p-1})$$

devient donc

$$(n+p)\sigma_{n+p} = n\sigma_n + pT$$

et l'expression T d'ordre n s'exprime par la formule suivante :

$$T = \frac{(n+p)\sigma_{n+p} - n\sigma_n}{p}.$$

---

[1] *Sur l'ordre de l'approximation des fonctions continues* (n° 56). M. Bernstein considère la série de polynomes trigonométriques.

En particulier, si $p = n$,

$$T = 2\tau_{2n} - \tau_n.$$

Nous allons faire une application de ces formules.

27. Nouvelle borne inférieure de la meilleure approximation [1]. — Considérons une fonction $f(x)$ et une expression trigonométrique approchée d'ordre n, $T(x)$. Désignons, comme précédemment, par S_k et σ_k les sommes de Fourier et de Fejér relatives à f, par s_k et τ_k les sommes analogues relatives à T, par ρ l'approximation fournie par T, et proposons-nous de trouver une borne inférieure de ρ.

Nous avons, par définition,

$$|f - T| = \rho.$$

Observons que la somme de Fejér d'une différence est la différence des sommes de Fejér, et appliquons la propriété fondamentale des sommes de Fejér (n° 25). Les sommes de Fejér de $f - T$, sont, avec $f - T$, de module $\leqq \rho$; par conséquent,

$$|\sigma_n - \tau_n| \leqq \rho, \qquad |\sigma_{n+p} - \tau_{n+p}| \leqq \rho.$$

Nous avons donc, sauf une erreur $\leqq \rho$,

$$T = f, \qquad \tau_n = \sigma_n, \qquad \tau_{n+p} = \sigma_{n+p}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation du numéro précédent

$$T - \frac{(n+p)\tau_{n+p} - n\tau_n}{p} = 0;$$

l'erreur totale sera inférieure à

$$\rho + \frac{(n+p)\rho + n\rho}{p} = 2\frac{n+p}{p}\rho$$

et, par conséquent, nous avons

$$\left| f - \frac{(n+p)\sigma_{n+p} - n\sigma_n}{p} \right| \leqq 2\frac{n+p}{p}\rho.$$

---

[1] De la Vallée Poussin, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 mai 1918.

Revenons aux sommes de Fourier; il vient enfin

$$\left| f - \frac{S_n + S_{n+1} + \ldots + S_{n+p-1}}{p} \right| \leq 2\frac{n+p}{p}\varepsilon.$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

La meilleure approximation ε d'une fonction f par une expression trigonométrique d'ordre n n'est pas inférieure au quotient par $2\frac{n+p}{p}$ de l'approximation obtenue, quand on prend comme valeur approchée de f la moyenne arithmétique de p sommes de Fourier consécutives à partir de S_n. En particulier (si $p = n$), elle n'est pas inférieure au quart de celle qui est fournie par la moyenne de n sommes de Fourier consécutives à partir de S_n.

Cette règle peut se simplifier dans des cas particuliers.

Désignons par R_n l'erreur $f - S_n$, et par

$$A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

le terme général de la série de Fourier de f. L'erreur relative à la moyenne est l'erreur moyenne, à savoir (si $p = n$)

$$\frac{R_n + R_{n+1} + \ldots + R_{2n-1}}{n} = \frac{A_{n+1} + 2A_{n+2} + \ldots + nA_{2n}}{n} - R_{2n},$$

et le maximum absolu de cette erreur est l'approximation fournie par la moyenne considérée.

Supposons, pour préciser, que f s'exprime en série de Fourier convergente et que la valeur de x qui maxime R_{2n} donne le même signe (donc celui de R_{2n}) à tous les termes A_k qui sont d'indices $> n$. Alors le maximum de l'erreur moyenne surpasse celui de $|R_{2n}|$ et nous avons la règle suivante :

Si f est développable en série de Fourier convergente, et que la valeur de x qui maxime R_{2n} donne le même signe à tous les termes de cette série d'indices $> n$, la meilleure approximation ε de $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre n ne sera pas inférieure au quart de celle fournie par la somme de Fourier d'ordre double, $2n$.

28. Ordre de la meilleure approximation de $|\sin x|$. Théorème de Bernstein. — Cette fonction est paire et de période π, la série de Fourier ne contient donc que des cosinus de multiples pairs de x. On a donc

$$|\sin x| = \sum a_{2k} \cos 2kx$$

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x| \cos 2kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2kx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x]\, dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right].$$

Tous les termes sont maximés et négatifs (sauf a_0) pour la même valeur $x = 0$, et la dernière règle s'applique.

La meilleure approximation de $|\sin x|$ par une expression d'ordre n est inférieure à

$$\max|R_n| = \frac{2}{\pi}\sum_{k>\frac{n}{2}}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(n+1)} & (n \text{ pair}), \\ \dfrac{2}{\pi n} & (n \text{ impair}); \end{cases}$$

mais elle est supérieure à

$$\frac{1}{4}\max|R_{2n}| = \frac{1}{2\pi(2n-1)}.$$

La meilleure approximation de $|\sin x|$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.

La fonction $|\cos x|$ se ramène à la précédente par le changement de x en $x + \frac{\pi}{2}$; elle admet donc la même approximation.

L'approximation de $|x|$ en série de polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$ revient à la précédente par la substitution $x = \cos\varphi$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, que M. Bernstein a obtenu par des méthodes tout autres : *La meilleure approximation de $|x|$ par un polynome d'ordre n dans l'intervalle $(-1, +1)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.* Cette question, que j'ai posée en 1908, a joué un rôle important dans le

développement de la théorie. La solution nouvelle que je viens d'en donner est la plus simple.

M. Bernstein a démontré le théorème précédent par deux méthodes différentes dans son Mémoire *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (1912) [1]. Il a beaucoup précisé les résultats dans un autre Mémoire *Sur la meilleure approximation de* $|x|$ *par des polynomes de degrés donnés* (1913) [2]. Dans celui-ci, il démontre que la valeur asymptotique de la meilleure approximation est la forme $\frac{\lambda}{n}$ où λ est une constante que l'on sait calculer au degré d'exactitude que l'on veut. Nous renverrons pour cela au Mémoire de M. Bernstein.

29. **Dérivées des sommes de Fejér.** — Comme la dérivée d'une somme de Fourier est la somme de Fourier de la dérivée, de même la dérivée d'une somme de Fejér, σ_n, de $f(x)$ est la somme de Fejér de $f'(x)$ supposée existante et bornée. Donc, *en tant qu'expression infiniment approchée pour* $n = \infty$, *la somme de Fejér est dérivable aussi longtemps que les dérivées successives de* $f(x)$ *admettent ce mode de représentation, donc aussi longtemps que ces dérivées sont continues.*

L'étude de la dérivation des sommes de Fejér conduit à des résultats intéressants. Nous allons d'abord exprimer σ_n sous forme d'intégrale définie. Changeons t en $t - \frac{nx}{2}$ dans l'expression définitive de σ_n par une intégrale donnée au n° **24**; il vient

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2t}{n}\right)\left[\frac{\sin\left(t - \frac{nx}{2}\right)}{t - \frac{nx}{2}}\right]^2 dt.$$

Or, si l'on dérive une fonction de $t - \frac{nx}{2}$, on a

$$D_x = -\frac{n}{2} D_t;$$

---

(1) *Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. IV, 1912.

(2) *Acta Mathematica*, t. 37, 1913.

il vient donc, par la règle de Leibniz,

$$D\sigma_n = \sigma'_n = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2t}{n}\right) D_t \left[\frac{\sin\left(t-\frac{nx}{2}\right)}{t-\frac{nx}{2}}\right]^2 dt$$

$$= \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{2t}{n}\right) D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt;$$

et, en observant que la dérivée d'une fonction paire est impaire,

$$\sigma_n = \frac{n}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right)-f\left(x-\frac{2t}{n}\right)\right] D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Désignons par $\Delta = \omega(\pi)$ l'oscillation de $f(x)$; il vient, par le théorème de la moyenne,

$$\sigma'_n = \frac{n\Delta}{2\pi}\int_0^{\infty}\left| D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt = l\Delta n,$$

en désignant par l la constante numérique

$$l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left| D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt.$$

Cette constante l est inférieure à $\frac{1}{4}$. En effet, $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ décroît quand t varie de o à π et sa dérivée est négative; on a partout ailleurs

$$\left| D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| = \left|\frac{\sin 2t}{t^2} - \frac{2\sin^2 t}{t^3}\right| < \frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3};$$

par conséquent,

$$l < \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\infty}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right),$$

ce qui est $< \frac{1}{4}$. De là, le théorème suivant :

Si $f(x)$ a pour oscillation Δ, la dérivée d'une somme de Fejér quelconque, σ_n, de $f(x)$ est de module $< l\Delta n$, où l est une constante numérique $< \frac{1}{4}$.

Ceci conduit à un autre résultat intéressant. Soit $T(x)$ une expression trigonométrique d'ordre n. Reprenons son expression

au moyen de deux sommes de Fejér τ_n et τ_{2n} (n° 26)

$$T = 2\tau_{2n} - \tau_n,$$

d'où

$$T' = 2\tau'_{2n} - \tau'_n.$$

Supposons que T soit de module $\leqq L$, donc d'oscillation $\Delta \leqq 2L$ et appliquons le théorème précédent. Nous voyons que τ'_{2n} et τ'_n sont respectivement de modules $\leqq 4\,ln\,L$ et $2\,ln\,L$. Donc : *Si une expression trigonométrique d'ordre n est de module* $< L$, *sa dérivée est de module* $< hn\,L$, *où h est une constante numérique.*

Toutefois ce procédé de raisonnement conduit à une valeur de h trop élevée. Le facteur h peut être abaissé à 1. C'est là un théorème très remarquable et très important, mais il se rattache à des considérations d'ordre algébrique. Nous allons le démontrer.

30. **Théorème** [1]. — *Soit* $T(x)$ *une expression trigonométrique d'ordre n. Si le module de* T *ne surpasse pas* L, *celui de sa dérivée* T' *ne surpasse pas* nL.

Nous allons établir trois propositions préliminaires :

1° *Une expression trigonométrique d'ordre* $\leqq n$, $T(x)$, *ne peut pas avoir plus de* $2n$ *racines non équivalentes, et s'il y a des racines multiples, elles comptent pour autant de racines simples qu'il y a d'unités dans leur ordre.*

Considérons la substitution

$$e^{ix} = t.$$

Elle fait correspondre à une même valeur de t une infinité de valeurs de x qui diffèrent d'un multiple de la période 2π et sont dites *équivalentes*. Deux valeurs de x qui correspondent à deux valeurs différentes de t ne satisfont pas à cette condition et sont *non équivalentes*. Soit

$$T = \sum_0^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx;$$

---

[1] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 27 mai 1918.

on aura, par la substitution précédente,

$$T(x) = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n}\left[\alpha_k\left(t^k + \frac{1}{t^k}\right) + \beta_k\frac{1}{i}\left(t^k - \frac{1}{t^k}\right)\right] = \frac{P_{2n}(t)}{t^n},$$

où P_{2n} est un polynome de degré $2n$. Or les racines de $T(x)$ sont données, avec leur ordre de multiplicité, par celles du polynome $P_{2n}(t)$, ce qui justifie la proposition.

2° *Si la dérivée de* T *admet le même module maximum* nL *que la dérivée de la fonction*

$$s = L\sin(nx + C),$$

où L *est une constante donnée et* C *une constante arbitraire, on peut choisir* C *de manière que la différence* $s' - T'$ *des dérivées ait une racine double.*

Soit ξ un point où $|T'|$ atteint son maximum nL; on a, en ce point, qui est un extrémé de T',

$$T'(\xi) = \pm nL, \qquad T''(\xi) = 0.$$

Déterminons C par la condition que $\cos(n\xi + C) = \pm 1$ et ait le signe de $T'(\xi)$, nous aurons

$$s'(\xi) = \pm nL = T'(\xi), \qquad s''(\xi) = 0.$$

Alors ξ est une racine double de $s' - T'$, car on a

$$s'(\xi) - T'(\xi) = 0, \qquad s''(\xi) - T''(\xi) = 0.$$

3° *Si le module maximum* L' de T *ne surpasse pas* L, $s' - T'$ *admet au moins* $2n$ *racines distinctes et non équivalentes.*

Soit d'abord $L' < L$. Alors s donne son signe à la différence $s - T$ aux $2n$ points non équivalents où $s = \pm L$. Soit

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ x_{2n},\ \ x_1 + 2\pi$$

la suite de $2n + 1$ de ces points embrassant une période. La différence $s - T$ est de signe alterné pour cette suite de points et admet $2n$ racines distinctes au moins, une dans chaque intervalle de deux points consécutifs x_k, x_{k+1}. Mais, entre deux racines de $s - T$,

il y en a une au moins de $s' - T'$, ce qui fait $2n$ racines distinctes de cette dérivée, qui, n'embrassant pas la période entière, sont non équivalentes.

Soit, en second lieu, $L' = L$. Donnons-nous un infiniment petit positif ε et considérons la différence

$$s - (1 - \varepsilon)T.$$

Comme dans le cas précédent, cette fonction admet $2n$ racines non équivalentes, qui s'intercalent entre les termes de la suite (1). Ces racines forment une nouvelle suite

$$(2) \qquad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_k, \quad \ldots, \quad \xi_{2n}, \quad \xi_1 + 2\pi, \qquad (x_k < \xi_k < x_{k+1}).$$

Mais ces racines ξ_k dépendent maintenant de ε et deux racines consécutives peuvent être infiniment voisines. Si l'intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) n'est pas infiniment petit, ξ_k et ξ_{k+1} sont, à la limite (pour $\varepsilon = 0$), deux racines distinctes de $s - T$ (indépendant de ε) et, entre elles, il y a une racine au moins η_k de $s' - T'$ *à distance finie* de ξ_k et ξ_{k+1}. D'autre part, si l'intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) est infiniment petit et se confond, par conséquent, avec le point x_{k+1}, la racine intermédiaire de $s' - T'$ est $\eta_k = x_{k+1}$. Mais les deux intervalles (ξ_{k-1}, ξ_k) et (ξ_{k+1}, ξ_{k+2}), contigus au précédent, sont finis, car ils contiennent respectivement x_{k-1} et x_{k+1}, et η_k est isolé des deux racines voisines η_{k-1} et η_{k+1} par la conclusion obtenue dans la première hypothèse. Donc, à chaque intervalle (fini ou non) de deux ξ_k consécutifs, correspond une racine distincte de $s' - T'$ et la conclusion sur le nombre de ces racines subsiste.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant, dont celui du début est la conséquence immédiate :

THÉORÈME. — *Soit* $T(x)$ *une expression trigonométrique entière dont le module ne surpasse pas* L, *si le module de sa dérivée atteint* nL, $T(x)$ *est de la forme*

$$s = L \sin(nx + C)$$

ou bien d'ordre $> n$.

Supposons d'abord que $|T'|$ dépasse nL. Déterminons la constante C comme dans la démonstration de (2°) et choisissons une constante $\lambda < 1$ de manière que $|\lambda T'|$ ait pour maximum nL. Alors $|\lambda T|$ a son maximum $< L$, donc $s' - \lambda T'$ a $2n$ racines distinctes

(3°) et une racine double (2°), donc $2n+1$ racines au moins. Cette expression (et, par conséquent, T) est d'ordre $> n$ (1°).

Supposons que $|T'|$ ait pour maximum $n\mathrm{L}$. Dans ce cas, $s'-T'$ a $2n+1$ racines (comme dans le cas précédent), mais peut être identiquement nulle. Donc T est identique à s ou bien d'ordre $> n$.

Remarque. — Le théorème précédent a été démontré par M. S. Bernstein, pour les fonctions T qui sont *paires*, par un raisonnement d'ordre analytique [1]. Le même auteur l'a énoncé pour le cas général, sauf l'introduction superflue d'un facteur 2, mais la démonstration qu'il en donne est sujette à critique.

Le théorème précédent s'applique, de proche en proche, à une dérivée d'ordre quelconque. On obtient ainsi l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Si le module d'une expression trigonométrique d'ordre n ne surpasse pas* L, *celui de sa dérivée d'ordre k ne surpasse pas* $n^k\mathrm{L}$.

---

[1] *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 2). M. Bernstein étend le théorème aux fonctions impaires par assimilation. C'est sur cette assimilation que porte la critique que nous formulons ici.

CHAPITRE III.

MÉTHODE GÉNÉRALE PROPRE A ABAISSER LA BORNE PRÉCÉDEMMENT ASSIGNÉE A L'APPROXIMATION.

La borne assignée à l'approximation par les sommes de Fourier comporte, dans le cas général, un facteur $\log n$, que l'on peut se proposer de faire disparaître. Les sommes de Fejér ne le permettent pas. Elles ne présentent d'ailleurs d'avantage sur celles de Fourier que pour les fonctions non dérivables. Nous sommes ainsi amenés à introduire des intégrales analogues à celle de Fejér, mais plus rapidement convergentes. Ce sont les fonctions $F_r(x, n)$, que nous allons définir.

Toutefois, avant d'aller plus loin, il convient de rappeler que les premiers résultats analogues à ceux que nous allons établir, ont été obtenus par M. D. Jackson dans sa Thèse inaugurale [1]. M. Jackson traite pour commencer la représentation par polynomes et en déduit après coup les théorèmes relatifs à la représentation trigonométrique. C'est la marche inverse que nous adoptons ici. Nous préciserons un peu les conclusions tout en conservant aux calculs une apparence moins rébarbative.

31. Définition de $F_r(x, n)$. — Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π. Donnons-nous deux entiers positifs r et n et posons

$$(1)\quad \begin{cases} F_r(x, n) = \dfrac{1}{\tau(r)} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt, \\ \tau(r) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt. \end{cases}$$

[1] *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen*, etc. Univ. Buchdruckerei, Göttingen, 1911.

La fonction $F_r(x, n)$ peut être considérée comme une généralisation de l'intégrale de Fejér à laquelle elle se réduit si $r = 1$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

L'expression $F_r(x, n)$ *est une expression trigonométrique en* x *d'ordre* $< rn$.

Changeons t en nt, F_r devient, à un facteur constant près,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{2r} dt.$$

Comme $f(x+2t)\sin^{2r} nt$ admet la période π, cette intégrale se décompose dans la somme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{t-k\pi}\right)^{2r} dt$$
$$= \frac{1}{(2r-1)!}\int_0^{\pi} f(x+2t)\sin^{2r} nt\, D^{2r-2}\frac{1}{\sin^2 t}\, dt.$$

Mais $\sin^{2r} nt\, D^{2r-2}\sin^{-2} t$ est une expression trigonométrique entière; elle est d'ordre $2(rn-1)$, car le premier facteur est d'ordre $2rn$ et le second d'ordre -2; de plus, elle est paire et de période π, donc elle ne contient que des cosinus de multiples pairs de t. En définitive, F_r s'exprime linéairement au moyen d'intégrales du type général

$$\int_0^{\pi} f(x+2t)\cos 2kt\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(u)\cos k(u-x)\, du,$$

où $k \leqq rn-1$, et qui sont des expressions trigonométriques en x d'ordre $< rn$.

32. Emploi de la fonction particulière $F_2(x, n)$. — Le cas où $r = 2$ est le premier qui se présente après celui de l'intégrale de Fejér ($r = 1$). Cette étude conduit à des résultats intéressants.

Calculons d'abord $\tau(2)$. On a, par le procédé de transformation employé plus haut et par une intégration par parties portant sur la dérivée,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{1}{3!}\int_0^{\pi}\sin^4 t\, D^2\frac{1}{\sin^2 t}\, dt = \frac{4}{3}\int_0^{\pi}\cos^2 t\, dt;$$

donc $\tau(2) = \frac{2\pi}{3}$,

$$F_2(x, n) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

L'expression $F_2(x, n)$ est trigonométrique en x d'ordre $2n - 1$. Quand n tend vers l'infini, elle tend, comme l'intégrale F_1 de Fejér, vers $f(x)$ supposée continue. Mais on peut abaisser la borne assignée à l'approximation. C'est l'objet du théorème suivant :

33. **Théorème I** [1]. — *Si $f(x)$ de période 2π admet le module de continuité $\omega(\delta)$, $F_2(x, n)$ représente $f(x)$ avec une approximation*

$$\varepsilon = A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

où A est une constante numérique < 3.

Nous avons, en effet,

$$F - f = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt;$$

et, en utilisant la propriété 2° du n° 6,

$$\left|f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x)\right| \leq \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)(2|t| + 1);$$

par conséquent,

$$\varepsilon \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} (2t + 1)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

en posant

$$A = \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} (2t + 1)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = 1 + \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt.$$

Enfin, en utilisant toujours le même mode de transformation, nous avons

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt = \int_0^{\infty} \left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right| dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{\sin^2 t} dt = 1.$$

---

[1] *Cf.* Dunham Jackson, *Dissertation inaugurale*, Satz VIII (p. 48).

et, en définitive,

$$A < 1 + \frac{6}{\pi} < 3.$$

34. **Théorème II.** — *Si $f(x)$ de période 2π admet une dérivée continue et de module de continuité $\omega_1(\delta)$, $F_2(x, n)$ représente $f(x)$ avec une approximation*

$$\rho < A\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

où A est une constante numérique $< \frac{5}{2}$.

L'équation au début de la démonstration précédente peut s'écrire

$$F - f = \frac{3}{2\pi}\int_0^\infty \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

Mais on a

$$\left|f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x)\right|$$
$$= \left|\frac{2}{n}\int_0^t \left[f'\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f'\left(x - \frac{2t}{n}\right)\right] dt\right| < \frac{2}{n}\int_0^t \omega_1\left(\frac{4t}{n}\right) dt$$
$$< \frac{2}{n}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^t (4t + 1)\, dt = 2\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}(2t^2 + t);$$

par conséquent, par le théorème de la moyenne,

$$\rho < \frac{3}{2\pi}\, 2\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\int_0^\infty (2t^2 + t)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = A\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

en posant

$$A = \frac{3}{\pi}\int_0^\infty (2t^2 + t)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \sin^2 t\, dt + \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t^3}\, dt.$$

La dernière intégrale ayant été évaluée dans la démonstration précédente, il vient

$$A < \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) < \frac{5}{2}.$$

Le procédé ne s'étend pas au cas où $f(x)$ admet des dérivées d'ordre plus élevé. L'emploi d'une seule intégrale F_r ne suffit plus,

mais il faut en combiner plusieurs entre elles. Dans cette combinaison, nous utiliserons un système d'équations linéaires que nous allons d'abord discuter.

35. **Sur un système linéaire.** — Soient $p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ des nombres donnés tous différents, et $a_0, a_1, \ldots, a_\lambda$ des inconnues à déterminer par le système de $\lambda + 1$ équations linéaires

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_\lambda = 1, \\ \dfrac{a_0}{p_0^g} + \dfrac{a_1}{p_1^g} + \ldots + \dfrac{a_\lambda}{p_\lambda^g} = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots, \lambda). \end{cases}$$

Ce système est bien déterminé, car son déterminant Δ a pour valeur

$$\Delta = \prod_{i>k} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_k}\right),$$

où le produit Π s'étend à toutes les différences dans lesquelles on a $i > k \geq 0$. La valeur de a_0 sera

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},$$

où Δ_0 est le déterminant qui se déduit de Δ en y remplaçant $\frac{1}{p_0}$ et ses puissances par 0, de sorte que

$$\Delta_0 = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_\lambda} \prod_{i,\, k \geq 0} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_k}\right).$$

Il vient ainsi

$$a_0 = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_\lambda} \frac{1}{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right)\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_0}\right)\ldots} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)\left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right)\ldots\left(1 - \frac{p_\lambda}{p_0}\right)}$$

et les valeurs de $a_1, a_2, \ldots$ se déduisent de celle de a_0 par des permutations d'indices.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant :

Si $p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ sont (dans un ordre arbitraire) les puissances $1, p, p^2, \ldots, p^\lambda$ d'un même nombre entier $p \geq 4$, les valeurs des inconnues $a_0, a_1, \ldots$ sont toutes de module < 2.

Il suffit de prouver cela pour a_0 (la numérotation des indices étant arbitraire). Dans l'expression finale de a_0, les quotients $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{p_2}{p_0}$, ... sont des puissances de p dont l'exposant est positif ou négatif, mais non nul. Les facteurs du dénominateur sont donc différents de zéro, ceux où cet exposant est positif sont des entiers, les autres figurent dans le produit infini

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\cdots = \frac{p-1}{p}\,\frac{p^2-1}{p^2}\cdots.$$

On a, par conséquent,

$$|a_0| = \frac{p}{p-1}\,\frac{p^2}{p^2-1}\cdots = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right)\cdots < e^{\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2-1}+\cdots}.$$

Cet exposant est égal à

$$\frac{1}{p-1}\left[1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2+p+1}+\cdots\right]$$
$$< \frac{1}{p-1}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right) = \frac{p}{(p-1)^2};$$

et, par conséquent,

$$|a_0| < e^{\frac{p}{(p-1)^2}} < e^{\frac{4}{3}} < 2.$$

36. **Théorème III.** — *Si $f(x)$ de période 2π possède une dérivée d'ordre r, intégrable et de module $< M_r$, on peut définir une expression trigonométrique, $T(x)$, d'ordre*

$$m < 2^{\lambda}(\lambda+2)n,$$

où λ est le plus grand entier contenu dans $\frac{r-1}{2}$, et qui représente $f(x)$ avec une approximation

$$\varepsilon < \psi(r)\frac{M_r}{n^r},$$

où $\psi(r)$ dépend de r seul et peut être assigné a priori.

Déterminons un système de $\lambda+1$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_\lambda$ par les équations (1) du numéro précédent où $p_0, p_1, \ldots$ seront les puissances successives de 4. Je dis que l'on peut définir $T(x)$ par

la formule

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k F_{\lambda+2}(x, 2^k n).$$

L'ordre m de T est celui de $F_{\lambda+2}(x, 2^\lambda n)$, c'est-à-dire

$$(\lambda+2)2^\lambda n - 1,$$

ce qui est conforme à l'énoncé. Il reste à prouver que T donne l'approximation φ assignée. Posons, en abrégé,

$$(1) \qquad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k f\left(x + \frac{2t}{2^k}\right);$$

les constantes a_k ont été déterminées par les conditions

$$(2) \qquad \varphi(0) = f(x), \qquad \varphi^{2s}(0) = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

qui reviennent respectivement aux $\lambda + 1$ équations linéaires (1) du numéro précédent. Nous avons maintenant

$$T(x) = \frac{1}{\tau(\lambda+2)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt$$

et, comme $\varphi(0) = f(x)$,

$$T - f = \frac{1}{\tau(\lambda+2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt;$$

et enfin

$$(3) \qquad T - f = \frac{1}{\tau(\lambda+2)} \int_{0}^{\infty} F\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt,$$

en posant, pour abréger,

$$F(t) = \varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0).$$

Nous allons évaluer le maximum ε de $|T - f|$ par le théorème de la moyenne. Remarquons que F et toutes ses dérivées d'ordre $< 2r$ s'annulent pour $t = 0$, celles d'ordre impair parce que F est paire, et celles d'ordre pair par les équations (2). Il vient donc, par la formule de Taylor,

$$\left|F\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{r!}\left(\frac{t}{n}\right)^r \max.|F^{2r}|.$$

Or la formule précédente montre que max. $|F^{(r)}|$ ne surpasse pas $2\max.|\varphi^{(r)}|$; donc, les $|a_k|$ étant < 2,

$$|F^{(r)}| < 2\sum_{k=0}^{\lambda}|a_k|\left(\frac{2}{2^k}\right)^r M_r < 4\,2^r\sum_{k=0}^{\lambda}\frac{1}{2^{kr}}M_r < 8\,2^r M_r,$$

$$\left|F\left(\frac{t}{n}\right)\right| < \frac{8M_r}{r!}\left(\frac{2t}{n}\right)^r.$$

Substituons cette majorante dans la formule (3); il vient

$$\varepsilon < \frac{M_r}{n^r}\,\frac{2^r}{r!}\,\frac{8}{\tau(\lambda+2)}\int_0^\infty t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4}dt.$$

Cette formule prouve le théorème. On peut faire

$$\psi(r) = \frac{2^r}{r!}\,\frac{8}{\tau(\lambda+2)}\int_0^\infty t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4}dt.$$

Cette intégrale existe, car $2\lambda+4 = r+3$ si r est impair, et $= r+2$ si r est pair.

Observons encore que l'on a

$$\tau(\lambda+2) > 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+3}dt > 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{\operatorname{tang} t}\right)^{r+3}dt > 2\int^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{r+4}dt$$

$$> 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{r+4}dt = 2\,\frac{(r+3)(r+1)}{(r+4)(r+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^r dt;$$

$$\int_0^\infty t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4}dt < \int_0^\infty t^r\left|\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+2}\right|dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\sin^{r+2}t|\,\frac{dt}{t^2}$$

$$< \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^r t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r t\,dt.$$

Nous en concluons, r pouvant être supposé $\geqq 2$,

$$\psi(r) < \frac{2^r}{r!}\,4\,\frac{(r+4)(r+2)}{(r+3)(r+1)} < 7\,\frac{2^r}{r!}.$$

Donc $\psi(r)$ décroît rapidement quand r augmente.

Le théorème III peut être présenté sous une forme qui en fait mieux saisir la portée. Ce sera l'objet du théorème suivant :

37. **Théorème III** *bis*. — *Si $f(x)$ admet une dérivée d'ordre r*

intégrable et de module $< M_r$, *alors, quel que soit* m *entier et positif,* $f(x)$ *est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre* $\leq m$ *avec une approximation*

$$\rho < \psi_1(r)\frac{M_r}{m^r},$$

où ψ_1 *est une fonction de* r *seul qu'on peut assigner* a priori.

Nous pouvons, en vertu du théorème précédent, construire une expression T d'ordre $< (\lambda + 2)2^\lambda n$ qui donne l'approximation

$$\rho < \psi(r)\frac{M_r}{n^r} = \psi(r)\left(\frac{m}{n}\right)^r \frac{M_r}{m^r}.$$

Prenons pour m le plus grand entier qui vérifie la condition

$$(\lambda + 2)2^\lambda n \leq m;$$

nous aurons

$$m < (\lambda + 2)2^\lambda(n+1), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{m}{n} \leq (\lambda + 2)2^{\lambda+1},$$

$$\rho < \psi(r)(\lambda + 2)^r 2^{r\lambda+1}\frac{M_r}{m^r},$$

ce qui prouve le théorème : on peut poser

$$\psi_1(r) = \psi(r)(\lambda + 2)^r 2^{r\lambda+1}.$$

D'après l'approximation de ψ obtenue à la fin du numéro précédent, $\psi_1(r)$ augmente très rapidement avec r. Il serait utile de savoir si cette croissance de ψ_1 tient à la nature des choses ou si elle est imputable à l'imperfection du procédé d'approximation employé. Mais nous ne traiterons pas cette question.

38. **Théorème IV.** — *Si* $f(x)$ *admet une dérivée d'ordre* r *continue et de module de continuité* $\omega_r(\delta)$, *alors, quel que soit* m *entier positif,* $f(x)$ *est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre* $\leq m$ *avec une approximation*

$$\rho < \psi_2(r)\frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right)}{m^r},$$

où ψ_2 *est une fonction de* r *seul qui peut être assignée* a priori.

Ce théorème se déduit du précédent, par le raisonnement géné-

ralisé de D. Jackson qui permet de passer du théorème III au théorème IV dans la théorie des séries de Fourier. Soit δ une partie aliquote de 2π. Nous savons définir une fonction F qui satisfait aux conditions (n° 21)

$$|f^{r} - F^{(r)}| \leqq 2\omega_r(\delta), \qquad |F^{(r+1)}| \leqq \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Ainsi f est la somme de deux fonctions $f - F$ et F auxquelles s'applique le théorème précédent, et qui sont susceptibles d'une représentation d'ordre $\leqq m$ avec les approximations respectives :

$$\rho_1 \leqq \psi_1(r)\frac{2\omega_r(\delta)}{m^r}, \qquad \rho_2 \leqq \psi_1(r+1)\frac{\omega_r(\delta)}{\delta m^{r+1}}.$$

Donc f admet l'approximation $\rho = \rho_1 + \rho_2$, qui est de la forme proposée en faisant $\delta = \frac{\pi}{m}$. On a

$$\psi_2(r) = 2\psi_1(r) + \frac{1}{\pi}\psi_1(r+1).$$

Ce théorème donne, comme cas particulier, le suivant :

THÉORÈME [1]. — *Si $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α, $f(x)$ est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre $\leqq m$, avec une approximation*

$$\rho < \frac{M}{m^{r+\alpha}},$$

où M *est une constante par rapport à m.*

En effet, on a, dans ce cas (M_1 constant),

$$\omega(\delta) = M_1\delta^{\alpha}.$$

On obtient donc l'inégalité précédente en posant

$$M = \psi(r)M_1\pi^{\alpha}.$$

---

[1] *Cf.* D. JACKSON, *Dissertation inaugurale*, Satz. VII (p. 46). L'auteur ne considère toutefois que la condition de Lipschitz d'ordre 1.

CHAPITRE IV.

THÉORÈMES RÉCIPROQUES. PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES QUE SUPPOSE UN ORDRE DONNÉ D'APPROXIMATION.

Dans les Chapitres précédents, nous nous sommes donné les propriétés différentielles de $f(x)$ et nous en avons déduit la possibilité d'un certain ordre d'approximation. Nous allons maintenant traiter le problème inverse. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ de période 2π est représentable avec une approximation d'un certain ordre et nous remonterons aux propriétés différentielles qui en résultent pour la fonction.

Voici le théorème fondamental :

39. **Théorème I.** — *Désignons par $\Omega(x)$ une fonction de x non croissante, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de x, et qui tend vers zéro pour $x = \infty$. Alors, si la fonction $f(x)$ de période 2π peut être représentée, quel que soit n, par une expression trigonométrique d'ordre n avec une approximation*

$$\rho_n = \frac{\Omega(n)}{n^r}, \tag{1}$$

où r est un entier nul ou positif; et si l'intégrale à limite infinie

$$\int^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}$$

existe, $f(x)$ possède une dérivée continue d'ordre r et cette dérivée admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h\left[\delta \int_a^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}\right], \tag{2}$$

où a et h sont des constantes convenables par rapport à δ.

Dans le cas où $r = 0$, $\omega(\delta)$ désigne le module de continuité de $f(x)$ lui-même.

Sous les conditions du théorème, $f(x)$ peut être exprimé par une série d'expressions trigonométriques u_n

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont le terme u_n (qui peut être nul) est d'ordre $\leqq n$, et dont le reste

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

satisfait à la condition

$$|R_n| \leqq \varrho_n < \frac{\Omega(n)}{n^r}.$$

Donnons-nous un entier $a > 1$ tel que $\Omega(x)$ soit non croissant pour $x > a$. Il suffit de prouver que la dérivée d'ordre r

$$R_{a^2}^{r}$$

existe et admet un module de continuité $\omega(\delta)$ qui vérifie une inégalité de la forme (2). En effet, il est clair que les dérivées de $f - R_{a^2}$ qui sont des expressions trigonométriques finies admettent un module de continuité vérifiant cette condition, pourvu que $\Omega(x)$ ne soit pas identiquement nulle, ce qu'on suppose évidemment. Faisons cette démonstration.

Posons

$$\varphi_k = R_{a^k} - R_{a^{k+1}},$$

nous aurons

$$R_{a^2} = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_k + \ldots.$$

Mais φ_k est une expression trigonométrique d'ordre a^{k+1} au plus, dont le module ne surpasse pas les bornes assignées à R_{a^k} et $R_{a^{k+1}}$. Par conséquent, Ω étant non croissant,

$$|\varphi_k| \leqq 2\,\frac{\Omega(a^k)}{a^{kr}}.$$

Alors, d'après le théorème connu (n° 30) sur l'ordre de grandeur des dérivées d'une expression trigonométrique d'ordre $\leqq a^{k+1}$, on a

$$|\varphi_k^r| \leqq 2\,\frac{\Omega(a^k)}{a^{kr}}\,(a^{k+1})^r = 2\,a^r\,\Omega(a^k).$$

$$|\varphi_k^{r+1}| \leqq 2\,\frac{\Omega(a^k)}{a^{kr}}\,(a^{k+1})^{r+1} = 2\,a^r\,a^{k+1}\,\Omega(a^k).$$

Il résulte de la première de ces deux inégalités que l'on a

$$R_x' = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k'$$

et que cette dérivée est continue, parce que la série dérivée ainsi obtenue est uniformément convergente. Nous allons, en effet, montrer que l'on peut en former une série majorante convergente.

Considérons les termes à partir de $k = \mu + 1$; nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\mu+1}^{\infty} \max.|\varphi_k'| &< 2a^r \sum_{\mu+1}^{\infty} \Omega(a^k) \\
&= 2a^{r+1} \sum_{\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} \cdot \frac{a^k(a-1)}{a-1} \\
&= \frac{2a^{r+1}}{a-1} \sum_{\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} (a^k - a^{k-1}) \\
&< \frac{2a^{r+1}}{a-1} \int_{a^\mu}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx.
\end{aligned}$$

Donc la série majorante $2a^r \sum \Omega(a^k)$ écrite sur la première ligne est convergente.

Calculons maintenant le module de continuité de cette dérivée. Soient Δx un accroissement de x de module $< \delta$ et $\Delta R_x'$, $\Delta\varphi_k$ les accroissements correspondants des fonctions. Nous avons

$$\Delta R_x' = \sum_{k=2}^{\mu} \Delta\varphi_k' + \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \Delta\varphi_k'.$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à la première somme. Nous avons

$$\omega(\delta) < \delta \sum_{k=2}^{\mu} \max.|\varphi_k'^{+1}| + 2 \sum_{\mu+1}^{\infty} \max.|\varphi_k'|.$$

Nous avons déjà obtenu pour la seconde somme une intégrale

majorante. Faisons la même chose pour la première. Nous avons

$$\sum_{k=2}^{\mu} \max.|\varphi_k^{(r-1)}| < 2a^{r-2} \sum_{2}^{\mu} \Omega(a^k) a^{k-1}$$

$$< \frac{2a^{r-2}}{a-1} \sum_{2}^{\mu} \Omega(a^k)(a^k - a^{k-1})$$

$$< \frac{2a^{r-2}}{a-1} \int_a^{a^\mu} \Omega(x)\,dx.$$

Substituons dans la borne de $\omega(\delta)$ les deux intégrales majorantes; il vient

$$\omega(\delta) < \delta \frac{2a^{r-2}}{a-1} \int_a^{a^\mu} \Omega(x)\,dx + \frac{2a^{r-1}}{a-1} \int_{a^\mu}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}.$$

Choisissons l'entier μ qui vérifie les conditions

$$a^{\mu+1} \cdot \frac{1}{\delta} < a^\mu, \qquad \text{d'où} \qquad a^\mu < \frac{a}{\delta};$$

il vient

$$\omega(\delta) < \frac{2a^{r-2}}{a-1} \left[\delta \int_a^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} \right],$$

ce qui est équivalent à la formule de l'énoncé.

40. Théorème II. — *Si, en plus des conditions du théorème précédent, on peut assigner une constante $\alpha < 1$, telle que la fonction $x^\alpha \Omega(x)$ soit non décroissante à partir d'une valeur déterminée a de x, alors $f^{(r)}(x)$ admet le module de continuité*

$$\omega(\delta) < h' \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x},$$

où h' est une constante par rapport à δ.

Il faut démontrer qu'il suffit de conserver le second terme de la formule (2) et, pour cela, que ce second terme n'est pas infiniment petit par rapport au premier. Pour s'en assurer, il faut

vérifier que le quotient de ces deux termes

$$\int_x^\infty \Omega(x)\frac{dx}{x} : \frac{1}{x}\int_a^{ax} \Omega(x)\,dx$$

ne tend pas vers zéro pour $x = \infty$.

C'est la conséquence du théorème de la moyenne. On en conclut, $x^\alpha\Omega(x)$ étant non décroissant,

$$\int_1^\infty \Omega(x)\frac{dx}{x} = \int_1^\infty x^\alpha\Omega(x)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} > \frac{\Omega(x)}{\alpha},$$

$$\frac{1}{x}\int_a^{ax} \Omega(x)\,dx = \frac{1}{x}\int_a^{ax} x^\alpha\Omega(x)\frac{dx}{x^\alpha}$$

$$< \frac{(ax)^\alpha\Omega(ax)}{x}\,\frac{(ax)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{a\Omega(ax)}{1-\alpha}.$$

Donc $\Omega(x)$ étant non croissant et $a > 1$, le quotient de ces deux termes est $> \frac{1-\alpha}{a\alpha}$.

Nous considérerons d'abord une application particulière du théorème précédent, qui fait apparaître sous une forme singulièrement précise la dépendance réciproque qui existe entre l'approximation et les propriétés différentielles de la fonction.

41. Théorème III. — *Si $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α ($0 < \alpha < 1$, limites exclues), alors, quel que soit n, $f(x)$ est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre n, avec une approximation*

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}} \qquad (M \text{ const.}).$$

Réciproquement, s'il est possible de satisfaire à cette condition quel que soit n, $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α [1].

---

[1] M. Bernstein a seulement prouvé que f vérifie une condition d'ordre α (*Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 14). Nous avons énoncé le théorème sous sa forme précise dans une conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918. (*L'Enseignement mathématique*, t. XX, 1918, p. [illegible]).

Nous connaissons déjà le théorème direct (n° 38). Il suffit de démontrer la réciproque. On a, par hypothèse, quel que soit n,

$$\rho_n < \frac{1}{n^r}\left(\frac{M}{n^\alpha}\right),$$

de sorte que la fonction $\Omega(x)$ des théorèmes précédents est ici

$$\Omega(x) = \frac{M}{x^\alpha}.$$

Les conditions des théorèmes I et II sont vérifiées :

L'intégrale $\int^\infty \Omega(x)\frac{dx}{x}$ existe et $x^\alpha\Omega(x)$ est égal à M, donc non décroissant. Donc, en vertu du théorème précédent, $f(x)$ a une dérivée continue d'ordre r, qui admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h'\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{h'}{\alpha}\delta^\alpha,$$

ce qui est une condition de Lipschitz d'ordre α.

Le théorème précédent suppose essentiellement α différent de ses limites 0 et 1. A ces limites, la correspondance devient moins précise. On s'en apercevra dans les théorèmes suivants :

42. Théorème IV. — *S'il est possible, quel que soit n, de représenter $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$ avec une approximation*

$$\rho_n < \frac{M}{n^r(\log n)^{1+\alpha}},$$

où M et α sont des constantes positives, $f(x)$ possède une dérivée d'ordre r, laquelle admet le module de continuité

$$\omega(\delta) < \frac{h}{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\alpha} \qquad (h \text{ const.}).$$

Les conditions des théorèmes I et II sont encore satisfaites. Donc, en vertu du théorème II, $f(x)$ admet une dérivée continue

d'ordre r, laquelle admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h' \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{1+\alpha}} = \frac{h'}{\alpha} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}},$$

ce qui prouve le théorème.

On s'assure facilement qu'à tout critérium de convergence absolue des intégrales à limites infinies, on peut faire correspondre un théorème analogue aux précédents. On peut ainsi formuler un théorème correspondant à chacun des critériums de convergence de Cauchy, basés sur la considération des fonctions successives :

$$\frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x(\log x)^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x \log x (\log \log x)^{1+\alpha}}, \quad \ldots$$

Les théorèmes III et IV correspondent aux deux premiers termes.

43. **Les cas d'exception au théorème I.** — Le théorème I suppose la convergence de l'intégrale

$$\int^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}.$$

Cette condition est essentielle pour que l'on puisse affirmer l'existence et la continuité de la dérivée d'ordre r. L'hypothèse que $\Omega(x)$ tende vers zéro pour $x = \infty$ ne suffit pas. Nous allons le montrer par un exemple très caractéristique, dans le cas où $r = 1$.

Soit $\Omega(x)$ une fonction continue de x qui tend *en décroissant* vers zéro quand x tend vers l'infini. Définissons $f(x)$ par la série absolument et uniformément convergente

$$f(x) = \frac{\Omega(1)}{1} \sin x + \frac{\Omega(2)}{2^2} \sin 2x + \ldots + \frac{\Omega(n)}{n^2} \sin nx + \ldots.$$

Les n premiers termes donnent une représentation d'ordre n avec l'approximation

$$\zeta_n = \Omega(n) \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \right] < \frac{\Omega(n)}{n}.$$

C'est la condition envisagée dans le théorème I pour $r = 1$. Nous allons montrer que *la continuité ou la non continuité de*

la dérivée $f'(x)$ dépendent exclusivement de l'existence ou de la non existence de $\int_1^\infty \Omega(x)\frac{dx}{x}$.

Remarquons d'abord que l'existence ou la non existence de cette intégrale entraînent la convergence ou la divergence de la série positive

$$(1)\qquad \frac{\Omega(1)}{1}+\frac{\Omega(2)}{2}+\ldots+\frac{\Omega(n)}{n}+\ldots$$

car, $\Omega(x)$ étant décroissant, cette série est comprise entre les deux bornes

$$\int_1^\infty \Omega(x)\frac{dx}{x},\qquad \Omega(1)+\int_1^\infty \Omega(x)\frac{dx}{x},$$

Donc, si l'intégrale existe, auquel cas la série converge, $f(x)$ admet une dérivée continue $f'(x)$, qui s'exprime par la série dérivée

$$(2)\qquad f'(x)=\frac{\Omega(1)}{1}\cos x+\frac{\Omega(2)}{2}\cos 2x+\ldots,$$

parce que cette série est uniformément convergente.

Supposons maintenant l'intégrale infinie et la série (1) divergente.

La dérivée $f'(x)$ existe, est continue et est donnée par la formule (2), sauf pour les valeurs $x\equiv 0$ (mod. 2π), car la série (2) reste uniformément convergente dans les intervalles ne contenant pas ces valeurs. C'est la conséquence d'un lemme classique d'Abel. Les sommes partielles

$$\cos kx+\cos(k+1)x+\ldots+\cos lx$$

sont alors bornées, car elles sont de module moindre que

$$(3)\qquad \left|\sum_{k=k}^{l} e^{\lambda ix}\right|<\left|\frac{2}{e^{ix}-1}\right|,$$

et cela entraîne la convergence uniforme de la série (2), parce que les coefficients des cosinus vont en décroissant.

Mais si x tend vers zéro, $f(x)$ augmente indéfiniment et la dérivée est discontinue. Nous allons, en effet, vérifier que la série (2) augmente indéfiniment. A cet effet, soit X le plus grand

entier contenu dans $\frac{\pi}{2x}$. Partageons la série (2) en deux parties

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda x + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda x.$$

La première tend manifestement vers l'infini quand x tend vers zéro, car tous les termes sont positifs et la série $\sum \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda}$ est infinie. Mais je dis que la seconde partie reste finie. Appliquons de nouveau le lemme d'Abel, en nous servant de la borne (3) que nous venons d'assigner aux sommes partielles de cosinus. La seconde partie est de module moindre que

$$\frac{\Omega(N+1)}{N+1} \left| \frac{2}{e^{ix}-1} \right| < \Omega\left(\frac{\pi}{2x}\right) \frac{1}{\pi} \left| \frac{x}{e^{ix}-1} \right|.$$

Quand x tend vers zéro, le dernier facteur a pour limite l'unité et l'expression entière tend vers zéro avec le facteur $\Omega\left(\frac{\pi}{2x}\right)$. Donc la somme des deux parties de la série (2) tend vers l'infini.

Cet exemple simple prouve combien est stricte la condition d'existence de l'intégrale à limite infinie formulée dans le théorème I.

Le même exemple prouve aussi que l'exclusion du cas limite $\alpha = 1$ est essentielle dans l'énoncé du théorème III. La condition

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \qquad (M \text{ const.})$$

n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une condition de Lipschitz d'ordre 1 pour la dérivée d'ordre r, ou pour la fonction elle-même, si $r = 0$ (comme dans l'exemple précédent). On a, dans cet exemple, $\rho_n < \frac{\Omega(n)}{n}$, et cependant $f(x)$ n'est pas lipschitzienne puisque sa dérivée n'est pas bornée. Toutefois, sous la condition $\rho_n < M : n^{r+1}$, la dérivée d'ordre r est continue et le théorème suivant permet d'en évaluer le module de continuité.

14. Théorème V. — *S'il est possible, quel que soit n, de représenter $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre n*

avec une approximation

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \qquad (M \text{ const.}),$$

alors $f(x)$ possède une dérivée continue d'ordre r, laquelle admet le module de continuité

$$\omega(\delta) \leqq h\,\delta\,|\log\delta| \qquad (h \text{ const.}).$$

En effet, le théorème I, où il faut faire

$$\Omega(x) = \frac{1}{x},$$

assigne à $\omega(\delta)$ la borne

$$h\left[\delta\int_a^{\frac{a}{\delta}}\frac{dx}{x} - \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right] = h\,\delta\,[|\log\delta| + 1],$$

ce qui revient (sauf la valeur de h) à la forme proposée.

En particulier, si l'on a, comme dans l'exemple du numéro précédent,

$$\rho_n < \frac{M}{n},$$

$f(x)$ admet le module de continuité

$$\omega(\delta) \leqq h\,\delta\,|\log\delta|,$$

mais on ne peut pas affirmer l'existence de la dérivée première.

CHAPITRE V.

APPROXIMATION PAR POLYNOMES ; RÉDUCTION A UNE APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE.

45. Polynomes trigonométriques. Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre. — Comme nous le savons déjà (n° 5), l'approximation par polynomes revient à une approximation trigonométrique. Tout intervalle (a, b) se ramène à l'intervalle $(-1, +1)$ par une substitution linéaire, il suffit donc d'étudier l'approximation par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$. C'est ce que nous allons faire.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans cet intervalle. La substitution

$$x = \cos t$$

transforme $f(x)$ en $f(\cos t) = \varphi(t)$, qui est une fonction paire et périodique de t. L'approximation trigonométrique de $\varphi(t)$ et celle de $f(x)$ par des polynomes sont deux problèmes complètement équivalents. Cette équivalence est mise le plus simplement en évidence par l'emploi des polynomes trigonométriques.

Le polynome trigonométrique de degré n est défini par la formule

$$P_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Cette formule définit effectivement un polynome en x de degré n, car on a

$$\cos nt = \frac{e^{nti} + e^{-nti}}{2} = \frac{(\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n}{2};$$

et, par la substitution

$$\cos t = x, \qquad \text{d'où} \qquad t = \arccos x,$$

il vient

$$\cos n \operatorname{arc}\cos x = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Comme les radicaux se détruisent, cette expression est bien un polynome en x de degré n.

Il est immédiat que la substitution $x = \cos t$ fait correspondre à tout polynome approché de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ une expression trigonométrique approchée de $f(\cos t)$. La réciproque est également vraie. Supposons que nous ayons obtenu pour $f(\cos t)$ une expression trigonométrique approchée d'ordre n, ne contenant que des cosinus puisque $f(\cos t)$ est paire, c'est-à-dire que nous ayons, avec une certaine approximation,

$$f(\cos t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \ldots + \alpha_n \cos nt;$$

nous aurons, avec la même approximation,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \ldots + \alpha_n P_n(x).$$

46. **Série de polynomes trigonométriques.** — Nous appellerons *série de polynomes trigonométriques* de $f(x)$ la série qui se déduit de celle de Fourier de $f(\cos t)$ par la méthode précédente. Le développement de $f(\cos t) = \varphi(t)$ en série de Fourier est de la forme

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots + a_n \cos nt + \ldots,$$

où l'on a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) \cos nt \, dt.$$

Le développement de $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques dans l'intervalle $(-1, +1)$, sera

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots,$$

où a_n, exprimé en fonction de x, sera

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

47. **Bornes inférieures assignables à la meilleure approximation par polynomes.** — Les deux règles, que nous avons déduites de la

considération des séries de Fourier, et qui assignent une borne inférieure à la meilleure approximation trigonométrique, se traduisent en règles correspondantes relatives à la meilleure approximation par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$. Voici d'abord l'énoncé qui correspond à la première (n° 9, 6°) :

I. *La meilleure approximation d'une fonction continue $f(x)$ par un polynome de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ n'est pas inférieure à*

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots)},$$

où les a_k sont les constantes de Fourier de $f(\cos t)$.

L'énoncé qui correspond à la seconde règle, c'est-à-dire à celle de Lebesgue (n° 17), sera le suivant :

II. *Si la somme de degré n des termes du développement de $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques donne une approximation ζ_n, la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynome de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ n'est pas inférieure à*

$$\frac{\zeta_n}{A \log n + B},$$

où A et B sont deux nombres assignés a priori.

48. Approximation obtenue par transformation de l'intégrale de Fejér généralisée $F_2(x, n)$ (n° 31). — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$. Formons l'expression $F_2(t, n)$ relative à $f(\cos t)$ (n° 32). Cette expression est un polynome en $\cos t$ et elle représente $f(\cos t)$ avec une approximation qui fait l'objet du théorème I du n° 33. Par la substitution $\cos t = x$, $F_2(t, n)$ se transforme dans un polynome en x fournissant, pour $f(x)$, la même approximation. Soit $\omega(\delta)$ le module de continuité de $f(x)$, celui de $f(\cos t)$ ne lui est pas supérieur, car $\cos t$ varie moins vite que t. Le théorème I du n° 33 se transforme donc dans celui-ci :

THÉORÈME I. — *Si $f(x)$ admet le module de continuité $\omega(\delta)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, le polynome approché de*

degré $2n-2$ *transformé de* $F_2(r, t)$ *fournit une approximation*

$$\rho < A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

où A *est un nombre* < 3 [1].

Supposons ensuite que $f(x)$ ait une dérivée continue admettant le module de continuité $\omega_1(\delta)$. Proposons-nous d'appliquer le théorème II du n° 34. Il faut au préalable calculer le module de continuité de

$$Df(\cos t) = -f'(\cos t)\sin t.$$

Si l'on donne à t un accroissement h de module $< \delta$, l'accroissement de cette dérivée est

$$-f'(\cos t)\Delta\sin t - \sin(t+h)\Delta f',$$

où Δ est la caractéristique de l'accroissement de la fonction. Mais $|\Delta\sin t|$ est $< \delta$ et $|\sin(t+h)|$ est < 1; donc l'expression précédente et, par conséquent, le module de continuité de $Df(\cos t)$ sont inférieurs à

$$\delta\max.|f'| + \omega_1(\delta).$$

Supposons qu'on ait $f'(0) = 0$. On peut toujours réaliser cette condition en retranchant au préalable de $f(x)$ le polynome du premier degré $xf'(0)$, ce qui ne change pas le module de continuité de la dérivée. Dans cette hypothèse, on a, entre -1 et $+1$,

$$|f'(x)| < \omega_1(1)$$

et le module de continuité de $Df(\cos t)$ est inférieur à

$$\delta\omega_1(1) + \omega_1(\delta).$$

Le théorème II du n° 34 conduit ainsi au suivant :

Théorème II. — *Soit* $f(x)$ *une fonction dont la dérivée première admet le module de continuité* $\omega_1(\delta)$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$; *on peut en définir un polynome approché*

---

[1] M. D. Jackson a défini le premier un polynome donnant la même approximation (*Dissertation inaugurale*, Satz V, p. 40). C'est à l'occasion de ce théorème qu'il introduit la fonction $\omega(\delta)$.

d'ordre $2n-2$ $(n>1)$ *donnant une approximation*

$$\left|\frac{\omega_1(1)}{n^2}+\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right|<2A\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

où A *est un nombre* $<5:2$.

Pour aller plus loin et formuler des théorèmes concernant le cas où la dérivée d'ordre r quelconque existe, il convient de chercher d'abord une borne de $|D^r f(\cos t)|$.

49. Borne de $|D^r f(\cos t)|$. — Le calcul de proche en proche met en évidence que l'on a

$$D^r f(\cos t)=\sum_{s=1}^{r} f^{(s)}(\cos t)\frac{P_s}{s!},$$

où P_s est un polynome de degré s en $\sin t$ et $\cos t$, indépendant de f. Pour déterminer P_s, il est donc permis de supposer f développable en série de Taylor. Posons

$$x=\cos t,\qquad f(x)=F(t),\qquad k=\cos(t+h)-\cos t;$$

il vient, par la formule de Taylor,

$$F(t+h)=f(x+k)=\sum_{0}^{\infty} f^{(s)}(x)\frac{k^s}{s!}.$$

Dérivons r fois par rapport à h, puis posons $h=0$. En observant que k s'annule avec h, il reste

$$F^{(r)}(t)=\sum_{s=1}^{r} f^{(s)}(x)\frac{1}{s!}[D_h^r k^s]_{h=0};$$

d'où, par comparaison avec la formule du début,

$$P_s=[D_h^r k^s]_{h=0}.$$

Cherchons maintenant une borne supérieure de $|P_s|$. A cet effet, remarquons qu'on a

$$k=\cos(t+h)-\cos t=\cos t(\cos h-1)-\sin t\sin h.$$

Il s'ensuit que le développement de k suivant les puissances de h

s'obtient en multipliant les termes du développement de $e^h - 1$ respectivement par l'un des quatre facteurs $\pm \cos t$, $\pm \sin t$, de modules $\leqq 1$, et qu'on a, par conséquent, même pour h complexe,

$$|k| \leqq e^{|h|} - 1.$$

Faisons décrire à h une circonférence de rayon 1 autour de l'origine : nous aurons, pour $h = 0$, par la formule majorante classique de Cauchy, le maximum étant pris sur la circonférence,

$$[D_h^r k^s]_{h=0} < r! \max. |k^s| = r!(e-1)^s.$$

Substituons ces majorantes dans la formule de dérivation écrite plus haut; il vient

$$|D^r f(\cos t)| \leqq r! \sum_{s=1}^{r} |f^{s)}(x)| \frac{(e-1)^s}{s!}.$$

Introduisons des hypothèses plus particulières sur la fonction $f(x)$. Supposons que $f^{(r)}(x)$ soit de module $< M_r$ entre -1 et $+1$ et que les dérivées des ordres moindres s'annulent toutes ainsi que $f(x)$ pour $x = 0$. Nous avons, dans ce cas,

$$|f^{(r)}(x)| < M_r, \quad |f^{(r-1)}(x)| < \frac{M_r|x|}{1}, \quad |f^{(r-2)}(x)| < \frac{M_r x^2}{2!}, \quad \ldots;$$

et, par conséquent, dans l'intervalle $(-1, +1)$,

$$|f^{(r)}(x)| < M_r, \quad |f^{(r-1)}(x)| < \frac{M_r}{1}, \quad \ldots, \quad |f^{(s)}(x)| < \frac{M_r}{(r-s)!}.$$

Substituant de nouveau ces majorantes, il vient

$$|D^r f(\cos t)| < M_r \sum_{s=1}^{r} \frac{r!}{s!(r-s)!} (e-1)^s < M_r[(e-1)+1]^r = M_r e^r.$$

Cette borne suppose que $f(x)$ et ses $r-1$ premières dérivées s'annulent pour $x = 0$, mais on peut toujours réaliser cette condition en retranchant de $f(x)$ un polynome convenable de degré $r-1$, ce qui ne change pas la dérivée d'ordre r ni, par conséquent, la valeur de M_r. Nous allons utiliser cette remarque dans le numéro suivant.

50. Approximation par les séries de polynomes trigonomé-

triques (1). — En vertu du théorème III du Chapitre II (n° 18), on peut assigner *a priori* deux constantes A et B, telles que si $\varphi(t)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r de module $\leqq M_r$, l'approximation fournie par la somme de Fourier d'ordre n quelconque de φ est inférieure à

$$(A \log n + B) \cdot \frac{M_r}{n^r}.$$

Si l'on suppose $f^{(r)}(x)$ de module $\leqq M_r$, il existe un théorème correspondant sur la représentation de $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques. Dans ce cas, l'approximation est la même que celle de $f(\cos t) = \varphi(t)$ en série de Fourier; elle sera donc donnée par la formule précédente, où il faut seulement remplacer M_r par une borne supérieure de $|D^r f(\cos t)|$.

Considérons une somme d'ordre $n \geqq r - 1$. Alors, pour calculer cette borne, nous pouvons admettre que f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $r - 1$ s'annulent pour $x = 0$, auquel cas cette borne est $M_r e^r$. Cela est permis, parce que, si cette condition n'avait pas lieu, on la réaliserait en retranchant de f un polynome convenable P de degré $r - 1$. Or $f - P$ a même dérivée d'ordre r que f et, d'autre part, le développement en série de polynomes trigonométriques de f s'obtient en ajoutant P à celui de $f - P$. Donc, pour un ordre $n \geqq r - 1$, l'approximation de f est la même que celle de $f - P$. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si $f(x)$ admet, dans l'intervalle $(-1, +1)$, une dérivée intégrable et de module $\leqq M_r$, la somme de degré $n \geqq r - 1$ de la série de polynomes trigonométriques de $f(x)$ fournit, dans cet intervalle, une approximation inférieure à*

$$(A \log n + B) M_r \left(\frac{e}{n}\right)^r,$$

où A et B sont les deux mêmes nombres que dans le théorème rappelé (n° 18).

Ce théorème en fournit un second concernant le cas où la dérivée d'ordre r est continue. Voici ce théorème, que nous allons démontrer :

---

(1) C'est M. Bernstein qui a étudié le premier cette question (*Sur la meilleure approximation des fonctions continues*, Chap. VI).

THÉORÈME IV. — *Si $f(x)$ admet, dans l'intervalle $(-1, +1)$, une dérivée d'ordre r dont le module de continuité soit $\omega_r(\delta)$, la somme de degré $n \geqq r$ de la série de polynomes trigonométriques de $f(x)$ fournit, dans cet intervalle, une approximation inférieure à* (¹)

$$(A \log n + B)(e^r + e^{r+1}) \frac{\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r},$$

où A *et* B *sont les mêmes nombres que ci-dessus.*

Soit δ une partie aliquote de l'unité; inscrivons un polygone $y = \psi(x)$ dans la courbe $y = f^{(r)}(x)$, en prenant pour sommets tous les points d'abscisses $\lambda\delta$ (λ entier); nous avons, comme dans la démonstration du théorème V du Chapitre IV (n° 21),

$$|f^{r} - \psi| \leqq \omega_r(\delta), \qquad |\psi'| \leqq \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Soit F une fonction admettant ψ pour dérivée d'ordre r; nous avons

$$|(f - F)^{r}| = |f^{r} - \psi| \leqq \omega_r(\delta), \qquad |F^{(r+1)}| = |\psi'| \leqq \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Faisons la décomposition $f = (f - F) + F$ et désignons par R_n, R'_n, R''_n les restes des séries de f, $f - F$ et F respectivement; nous avons, pour $n \geqq r$, en vertu du théorème précédent,

$$|R'_n| \leqq (A \log n + B)\left(\frac{e}{n}\right)^r \omega_r(\delta),$$

$$|R''_n| \leqq (A \log n + B)\left(\frac{e}{n}\right)^{r+1} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Mais $R_n = R'_n + R''_n$. Ajoutons donc les deux égalités précédentes et faisons $\delta = \frac{1}{n}$; nous trouvons la borne assignée à R_n.

51. Polynomes conduisant, dans le cas général, à une meilleure approximation. — Le théorème III *bis* du Chapitre III (n° 37) se transforme aussi par la substitution $x = \cos t$; et, moyennant

(¹) M. Bernstein énonce un théorème qui rentre comme cas particulier dans celui-ci. Toutefois, il n'étudie pas la manière dont l'approximation dépend de r [*Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 59)].

l'introduction d'un polynome auxiliaire de degré $= r$ (comme dans le cas précédent), on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME V [1]. — *On peut définir* a priori *une fonction* $\Psi_1(r)$ *de* r *seul qui jouit de la propriété suivante : quel que soit l'entier* $m \geq r$, *une fonction* $f(x)$ *dont la dérivée d'ordre* r *est intégrable et de module* $< M_r$ *dans l'intervalle* $(-1, -1)$, *peut être représentée dans cet intervalle par un polynome de degré* $\leq m$, *convenablement choisi, avec une approximation*

$$\varepsilon \leq \Psi_1(r) \frac{M_r}{m^r}.$$

Cette fonction Ψ_1 est effectivement égale à $e^r \psi_1$, où ψ_1 est la fonction définie dans le théorème rappelé (n° 37).

Enfin nous pouvons énoncer un dernier théorème, qui se déduit du précédent comme le théorème IV de III, au numéro précédent :

THÉORÈME VI. — *Quel que soit l'entier* $m \geq r$, *une fonction* $f(x)$, *dont la dérivée d'ordre* r *admet le module de continuité* $\omega_r(\delta)$, *peut être représentée dans l'intervalle* $(-1, -1)$ *par un polynome convenable de degré* $\leq m$ *avec une approximation*

$$\varepsilon \leq [\Psi_1(r) + \Psi_1(r+1)] \frac{\omega_r\left(\frac{1}{m}\right)}{m^r},$$

où Ψ_1 *est la fonction de* r *seul définie dans le théorème précédent.*

En particulier, si $f^{(r)}(x)$ *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* α, *on peut assigner une constante* M *par rapport à* n, *telle que l'on ait, quel que soit* n,

$$\varepsilon_n \leq \frac{M}{n^{r+\alpha}}.$$

---

(1) C'est M. D. Jackson qui a construit le premier des polynomes donnant une approximation de l'ordre indiqué ici. C'est lui aussi le premier qui a montré que les coefficients analogues à Ψ_1 ne dépendent que de r (*Dissertation inaugurale*, Satz IV *a*, p. 40). Toutefois, il n'a pas étendu ce dernier résultat à la représentation trigonométrique. Les résultats de sa Thèse ont été précisés dans un Mémoire plus récent : *On approximation by trigonometric Sums and polynomials* (*Trans. of the Amer. math. Society*, 1911).

Dans le cas plus particulier où $\alpha = 1$, ce théorème a été énoncé par M. Dunham Jackson [1].

52. Le problème inverse. — La question de remonter de l'ordre de l'approximation par polynomes aux propriétés différentielles de la fonction se ramène au même problème concernant l'approximation trigonométrique, donc aux théorèmes énoncés dans le Chapitre précédent. Nous ne reprendrons pas cette question en détail et nous nous bornerons à quelques énoncés caractéristiques. L'approximation de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynome de degré $\leqq n$ est la même que celle de $f(\cos t) = \varphi(t)$ par une expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$. Or on a

$$\frac{d}{dx} = -\frac{d}{\sin t\, dt}.$$

On en conclut, Q_k désignant un polynome en $\sin t$ et $\cos t$,

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{\sin^r t} \sum_{k=1}^{r} \varphi^{(k)}(t) Q_k = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{r}{2}}} \sum_{k=1}^{r} \varphi^{(k)}(t) Q_k.$$

Ainsi l'existence et la continuité des dérivées de φ dans l'intervalle $(-1, +1)$ entraînent celles des dérivées de f jusqu'au même ordre, dans le même intervalle, sauf aux limites ± 1. Si $\varphi^{(r)}(t)$ admet un module de continuité de l'une des formes (M constant),

$$\omega(\delta) < M\delta^{\alpha}, \quad \omega(\delta) < M\delta|\log\delta|,$$

le module de continuité de $f^{(r)}(x)$ vérifiera une inégalité de même forme dans tout intervalle intérieur (au sens étroit) à $(-1, +1)$. Seule la valeur de la constante M peut changer. Observons encore que tout intervalle fini (a, b) se transforme en $(-1, +1)$ par une substitution linéaire, qui n'altère pas les propriétés précédentes. Il résulte de là que les théorèmes III (n° 41) et V (n° 44) du Chapitre précédent entraînent les théorèmes correspondants que voici :

THÉORÈME VII. — *Si, dans un intervalle (a, b), $f(x)$ possède une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α $(0 < \alpha \leqq 1)$, alors, quel que soit n, $f(x)$ peut être (en vertu du théorème VI) représenté par un*

---

[1] *Dissertation inaugurale*, Satz II, p. 23.

polynome de degré n avec une approximation

$$\varepsilon_n = \frac{M}{n^{r+\alpha}} \qquad (M \text{ const.}).$$

Réciproquement, si l'on peut vérifier cette condition, quel que soit n, alors $f(x)$ admet, dans tout intervalle intérieur à (a, b), une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α (1).

Le cas où $\alpha = 1$ est exclu et fait exception. La réciprocité n'est plus complète. Dans ce cas, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Si, quel que soit n, $f(x)$ peut être représenté dans l'intervalle (a, b) par un polynome d'ordre n avec une approximation*

$$\varepsilon_n = \frac{M}{n^{r+1}} \qquad (M \text{ const.}),$$

alors $f(x)$ possède, dans tout intervalle donné intérieur à (a, b), une dérivée d'ordre r, qui admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h\,\delta\,|\log\delta| \qquad (h \text{ const.}).$$

La seconde Partie du théorème VII (partie réciproque) est due, en grande partie, à M. Bernstein. Ce savant géomètre a, en effet, démontré, dans la même hypothèse, l'existence de toute condition de Lipschitz d'ordre $< \alpha$ (2). Il a aussi signalé les exceptions qui se produisent dans le cas $\alpha = 1$ (3). M. Bernstein traite directement la représentation par polynomes, mais la représentation trigonométrique donne lieu à des théorèmes plus simples et il est plus avantageux de traiter celle-ci pour commencer. C'est ce que nous avons fait.

---

(1) M. P. Montel vient d'établir (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1919) un théorème analogue. Il remplace seulement la propriété de vérifier une condition de Lipschitz d'ordre α par celle d'admettre des dérivées généralisées de Liouville de tous les ordres $< \alpha$. On doit, par conséquent, en conclure qu'*une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α admet des dérivées de tout ordre $< \alpha$*. Ce théorème a été énoncé récemment par M. Hermann Weyl (*Vierteljahrschrift de Zurich*, 1917). Je dois ce dernier renseignement à une Communication obligeante de M. Montel.

(2) *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (nos 14 et 15).

(3) *Ibid.* (n° 19).

CHAPITRE VI.

POLYNOME D'APPROXIMATION MINIMUM.

53. **Polynome de Lagrange.** — On sait qu'un polynome de degré $\leqq n$ est complètement déterminé par les valeurs, d'ailleurs arbitraires, qu'il prend en $n+1$ points donnés $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposerons généralement que ces valeurs sont celles prises par une fonction donnée $f(x)$. Alors le polynome $P(x)$ de degré $\leqq n$, qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$ aux $n+1$ points donnés, s'exprime par une formule classique connue sous le nom de *formule de Lagrange*. Cette formule est la suivante :

$$P(x) = S(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x - x_i} \frac{f(x_i)}{S'(x_i)},$$

où $S(x)$ est le polynome de degré $n+1$

$$S(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

L'exactitude de cette formule se vérifie immédiatement. On en tire les conséquences suivantes, qui nous seront utiles :

1° Si un polynome variable de degré $\leqq n$ est borné en $n+1$ points donnés (donc *a fortiori* s'il est borné dans un intervalle), tous ses coefficients sont bornés.

2° Un polynome variable de degré $\leqq n$ qui prend des valeurs infiniment petites en $n+1$ points donnés, a tous ses coefficients infiniment petits.

3° Deux polynomes variables de degré $\leqq n$ qui prennent des valeurs infiniment voisines en $n+1$ points donnés, ont leurs coefficients de même rang infiniment voisins et nous dirons que ces polynomes sont infiniment voisins.

54. Approximation minimum dans un intervalle. — Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

un polynome de degré n *à coefficient réels*. Considérons ce polynome, supposé donné, comme une expression approchée de $f(x)$ dans (a, b). La différence, positive ou négative,

$$P(x) - f(x),$$

est l'*écart* au point x. Le maximum de la valeur absolue de l'écart dans l'intervalle (a, b) est l'*approximation* fournie par P dans cet intervalle.

Considérons maintenant l'ensemble de tous les polynomes de degré $\leqq n$. Chacun d'eux représente $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) avec une approximation qui lui correspond, ρ'. La borne inférieure de ρ' pour cet ensemble est un nombre positif ou nul. Cette borne est *l'approximation minimum* ou *la meilleure approximation* d'ordre n. Nous la désignerons par ρ. Nous allons prouver qu'il existe un polynome de degré $\leqq n$ et un seul qui fournit cette approximation ρ : c'est le *polynome d'approximation minimum dans* (a, b) *pour l'ordre* n.

55. Existence du polynome d'approximation minimum [1]. — *Il existe un polynome* $P(x)$ *de degré* $\leqq n$ *qui réalise l'approximation minimum* ρ.

Par définition de ρ, on peut assigner une suite de polynomes P_1, P_2, ..., P_k, ... de degré $\leqq n$, tels que les approximations correspondantes ρ_1, ρ_2, ..., ρ_k, ... tendent vers ρ. Dans ce cas, la suite P_1, P_2, ... tend uniformément vers $f(x)$ dans (a, b). Donc ces polynomes sont bornés dans (a, b) (quel que soit leur indice) et, par conséquent, tous leurs coefficients sont bornés aussi et de module inférieur à un nombre fixe M (53). Donc de la suite infinie P_1, P_2, ..., on peut extraire une suite P'_1, P'_2, ..., infinie

[1] Tchebychef, qui a introduit cette notion, a admis sans démonstration l'existence du polynome d'approximation minimum. Celle-ci a été démontrée par M. E. Borel [*Leçons sur les fonctions de variables réelles*, 1905]. *Voir* aussi Kirscherger, *Ueber Tchebycheff Annaherungsmethode* (*Inaugural-Dissertation*, Gottingen, 1902)].

aussi, telle que le coefficient de x^n ait une limite; de la suite P'_1, P'_2, ... on peut extraire une suite P''_1, P''_2, ..., telle que le coefficient de x^{n-1} ait une limite, et ainsi de suite. Finalement, on formera une suite de polynomes ayant une limite P. Ce polynome P réalise l'approximation minimum ρ. Nous allons montrer, dans le numéro suivant, que ce polynome est unique, et en faire connaître les propriétés les plus caractéristiques.

56. Propriétés du polynome d'approximation minimum dans un intervalle (a, b). — 1° *Si le polynome* P *de degré* $\leqq n$ *est d'approximation minimum dans l'intervalle* (a, b), *on peut assigner* $n+2$ *points de l'intervalle* (a, b), *où l'écart* $f - P$ *atteint ses valeurs extrêmes* $\pm\rho$ (*supposées* $\neq 0$), *avec alternance de signes d'un point au suivant* [1].

Considérons l'écart variable

$$\varphi(x) = f(x) - P(x).$$

Comme il est fonction continue de x, on peut diviser l'intervalle (a, b) en intervalles consécutifs assez petits pour qu'il ne s'annule dans aucun des intervalles où il atteint l'une de ses valeurs extrêmes $\pm\rho$. Soit

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \ldots, \quad \delta_m$$

la suite de ces intervalles où $\varphi(x)$ atteint l'une de ses valeurs extrêmes, et soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_m$$

la suite des unités du signe de $\varphi(x)$ dans chacun d'eux. Le théorème énoncé revient à dire que cette dernière suite comporte au moins $n+1$ variations de signes. Je vais prouver que, s'il y en avait moins, P ne serait pas d'approximation minimum.

Si tous les termes de la suite étaient de même signe, $\varphi(x)$ atteindrait sa borne $+\rho$ ou $-\rho$ avec le même signe partout et il suffirait d'ajouter à P une constante très petite de ce même signe pour améliorer l'approximation.

Supposons donc que la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, contienne $k \geqq n$ groupes

---

[1] E. Borel. *Leçons sur les fonctions de variables réelles.*

de deux termes consécutifs de signes contraires. Soit ε_i, ε_{i+1} l'un quelconque de ces groupes. Les deux intervalles correspondants δ_i δ_{i+1} ne sont pas contigus (φ ne s'annulant dans aucun des deux). Nous pouvons donc assigner un point ξ intermédiaire entre δ_i et δ_{i+1}, limites exclues. Soit

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_k$$

la suite des points ξ ainsi choisis et correspondant aux k groupes consécutifs. Formons le polynome de degré $\leqq n$:

$$\psi(x) = \varepsilon_1(\xi_1 - x)(\xi_2 - x)\ldots(\xi_k - x),$$

où ε_1 désigne, comme précédemment, l'unité du signe de φ dans δ_1. Ce polynome aura le signe de φ dans chacun des intervalles δ_1, δ_2, ... et ne s'y annulera pas. Ceci fait, soit ε un nombre positif, je dis que le polynome de degré $\leqq n$,

$$P + \varepsilon\psi,$$

fournira dans (a, b) une approximation $< \rho$, pourvu que ε soit suffisamment petit.

En effet, soit $\rho' < \rho$ la borne de $|\varphi|$ dans les intervalles autres que $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$. On obtiendra le résultat demandé, en prenant ε assez petit pour que $|\varepsilon\psi|$ soit $< \rho - \rho'$ dans (a, b). La valeur absolue de l'écart dû à $P + \varepsilon\psi$, à savoir

$$|f - P - \varepsilon\psi| = |\varphi - \varepsilon\psi|,$$

sera effectivement $< \rho$ dans les intervalles δ_1, δ_2, ... où φ et ψ sont de même signe; elle le sera encore dans les autres, car on aura, dans ceux-ci,

$$|\varphi - \varepsilon\psi| = |\varphi| + |\varepsilon\psi| < \rho' + (\rho - \rho') = \rho.$$

2° *Le polynome d'approximation minimum est unique.*

En effet, soient P et Q deux polynomes de degrés $\leqq n$, fournissant l'approximation minimum ρ. Le polynome, de degré $\leqq n$,

$$R = \frac{P + Q}{2},$$

fournit une approximation $\leqq \rho$, car on a

$$f - R = \frac{1}{2}(f - P) + \frac{1}{2}(f - Q).$$

Donc R est un nouveau polynome d'approximation minimum et $|f - R|$ atteint ρ en $n + 2$ points, en vertu de 1°. Mais ceci n'est possible que si, en ces points, $f - P$ et $f - Q$ atteignent simultanément et avec le même signe leurs valeurs extrêmes $\pm \rho$. Alors P et Q, prenant la même valeur en $n + 2$ points, sont identiques.

3° *La propriété* 1° *caractérise le polynome* P *d'approximation minimum. En effet, soit* Q *un polynome de degré* $\leqq n$; *si l'écart* $f - Q$ *atteint son maximum absolu* ρ' *avec alternance de signes en* $n + 2$ *points consécutifs de l'intervalle* (a, b), *alors* $\rho' = \rho$ *et, en vertu de* 2°, Q *est identique à* P.

Si ρ' était $> \rho$, le polynome de degré n

$$P - Q = (f - Q) - (f - P)$$

aurait le signe de $f - Q$ aux points où cet écart atteint $\pm \rho'$. Il changerait donc $n + 2$ fois de signe et aurait $n + 1$ racines au moins, ce qui est impossible.

57. **Borne inférieure de l'approximation minimum.** — *Soit* Q *un polynome de degré* $\leqq n$; *si* $f - Q$ *est de signes alternés en* $n + 2$ *points consécutifs de l'intervalle* (a, b) *et prend en chacun de ces points une valeur absolue* $\geqq \rho'$, *alors* ρ' *est* $\leqq \rho$. *En d'autres termes,* ρ' *est une borne inférieure de l'approximation minimum* (¹).

La démonstration est identique à celle qu'on vient de faire pour la proposition 3° qui précède.

Il y a lieu d'observer que si l'écart $f - Q$ prend des signes alternés en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b), l'approximation minimum sera intermédiaire entre la plus petite valeur absolue de l'écart sur cet ensemble de points et l'approximation fournie par Q dans (a, b) tout entier.

58. **Approximation minimum d'ordre** n **sur un ensemble de** $n + 2$ **points** (²). — Il est utile, pour préciser les propriétés du

(¹) C. de la Vallée Poussin, *Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle* (*Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique*, classe des Sciences, n° 12, 1910. Théorème n° 15).

(²) C. de la Vallée Poussin, Mémoire cité.

polynome d'approximation d'ordre n dans un intervalle, de définir et d'étudier le polynome d'approximation dans un ensemble de $n+2$ points de cet intervalle.

Considérons donc un ensemble E de $n+2$ points de l'intervalle (a, b)

$$(\mathrm{E}) \qquad x_0 < x_1 < x_2, \quad \ldots, \quad < x_n < x_{n+1}$$

et une fonction $f(x)$ qui prend des valeurs déterminées en chacun de ces points. Je vais montrer que, parmi les polynomes d'ordre n, il en est un qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ pour l'ensemble des points de E. Ce polynome est, pour l'ordre n, le polynome d'approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E, et je vais encore montrer que ce polynome est unique.

Par définition, ce polynome $\mathrm{P}(x)$ est celui qui minime le plus grand des écarts absolus

$$|f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)| \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

Nous allons montrer qu'il se détermine par des calculs purement algébriques.

Proposons-nous d'abord de déterminer un polynome

$$\mathrm{Q} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

de degré n, et l'approximation correspondante ρ', par la condition que les écarts aux points de E soient entre eux dans un rapport assigné, à savoir celui des nombres

$$u_0, \quad -u_1, \quad +u_2, \quad \ldots, \quad \pm u_{n+1},$$

et soient, de plus, du même signe que ces nombres.

Nous supposons que $u_0, u_1, \ldots,$ sont des nombres positifs ou négatifs de module ≤ 1, mais l'un au moins de module 1. Nous avons placé des signes alternés devant ces nombres pour la commodité des calculs ultérieurs. Si donc ρ' est l'approximation obtenue avec Q sur E, les écarts aux points consécutifs de E sont

$$u_0\rho', \quad -u_1\rho', \quad +u_2\rho', \quad \ldots, \quad \pm u_{n+1}\rho'.$$

Dans ce cas, ρ' et les $n+1$ coefficients a de Q sont déterminés

par le système de $n+2$ équations linéaires

$$\begin{aligned}
f_0 &= -u_0\rho' + a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n,\\
f_1 &= -u_1\rho' + a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n+1} &= \pm u_{n+1}\rho' + a_0 + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_n x_{n+1}^n,
\end{aligned}$$

ayant pour déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -u_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots \\ -u_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots \\ +u_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Désignons par A_0, $-A_1$, $+A_2$, ..., les mineurs relatifs aux éléments de la première colonne. Ce sont des déterminants de Vandermonde tous positifs, car on a

$$\begin{aligned}
A_0 &= (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})\ldots(x_2 - x_1),\\
A_1 &= (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})\ldots(x_2 - x_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et toutes ces différences sont positives. Il vient ainsi

$$D = u_0 A_0 + u_1 A_1 + \ldots + u_{n+1} A_{n+1}.$$

Résolvons maintenant le système par rapport à ρ'; il vient

$$(1) \qquad \rho' = \frac{f_0 A_0 - f_1 A_1 + \ldots \pm f_{n+1} A_{n+1}}{u_0 A_0 - u_1 A_1 + \ldots - u_{n+1} A_{n+1}}.$$

Le système admet une solution bien déterminée, sauf le cas où les u seraient choisis de manière à annuler D. Ceci n'aura certainement pas lieu si les u sont de même signe.

Si le numérateur de l'expression de ρ' est nul, et si les u n'annulent pas D (donc s'ils sont de même signe), on a

$$\rho' = 0.$$

Le polynome Q représente exactement f dans l'ensemble E, l'approximation est nulle et Q se confond avec le polynome d'approximation minimum. Un autre polynome de degré $\leqq n$ fournit nécessairement sur E des écarts liés par la relation $D = 0$.

Supposons maintenant que le numérateur ne s'annule pas. L'expression (1) de ρ' montre qu'on minime ρ' en choisissant

tous les u de même signe (donc celui du numérateur) et en leur donnant la valeur absolue maximum 1. Donc l'approximation minimum sur E est donnée par la formule

$$(2) \qquad \rho = \frac{|A_0 f_0 - A_1 f_1 + \ldots + A_{n+1} f_{n+1}|}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}.$$

Alors le polynome d'approximation sur E est entièrement déterminé, car on connaît ses valeurs aux $2n+2$ points de E. D'après le calcul qui précède, ce polynome est entièrement caractérisé par la propriété de fournir des écarts égaux et de signes contraires en deux points consécutifs de E.

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

Il existe un polynome P *d'ordre* $\leq n$ *et un seul qui est d'approximation minimum sur* E. *Ce polynome fournit des écarts de même valeur absolue et de signes contraires en deux points consécutifs de* E *et cette propriété le caractérise. Il n'y a d'exception que si la représentation est exacte et l'approximation nulle.*

59. **Théorème.** — *Si $f(x)$ admet dans l'intervalle (a, b) une dérivée $(n+1)^{ième}$ continue et de module $<$ M et que sa meilleure approximation sur l'ensemble E_0 formé de $n+2$ points $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ de cet intervalle soit ρ_0, alors le plus petit écart δ de deux points de E_0 satisfait à la condition*

$$\delta \geq \frac{(n+1)!}{(b-a)^n} \frac{2\rho_0}{M}.$$

Transformons l'expression (2) de ρ_0. Soient ϖ le produit de toutes les distances de deux points de E, ϖ_k celui des seules distances de x_k aux autres points. On a

$$A_k = \varpi : \varpi_k,$$

d'où

$$\rho_0 = \frac{\left|\dfrac{f(x_0)}{\varpi_0} - \dfrac{f(x_1)}{\varpi_1} + \ldots \pm \dfrac{f(x_{n+1})}{\varpi_{n+1}}\right|}{\dfrac{1}{\varpi_0} + \dfrac{1}{\varpi_1} + \ldots + \dfrac{1}{\varpi_{n+1}}}.$$

Supposons $x_0 < x_1 < x_2 \ldots$. L'approximation de $f(x)$ est la même que celle de $f(x) - f(x_0)$. Substituons cette fonction

à $f(x)$ dans la formule précédente et supprimons le premier terme du dénominateur, ce qui augmente le quotient; il vient

$$\rho_0 < \frac{\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{\varpi_1} - \ldots + \dfrac{f(x_{n+1})-f(x_0)}{\varpi_{n+1}}\right|}{\dfrac{1}{\varpi_1} + \dfrac{1}{\varpi_2} + \ldots + \dfrac{1}{\varpi_{n+1}}}.$$

Soit $E_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ l'ensemble obtenu en supprimant le premier point de E_0. Désignons par $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots,$ les divers produits de distances de deux points de E_1 et posons

$$f_1(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

En observant que $x_i - x_0$ est de même signe et $< b-a$ pour tour les indices i, la formule précédente peut s'écrire

$$\rho_0 < \left|\frac{\dfrac{f_1(x_1)}{\varpi_1} - \ldots + \dfrac{f_1(x_{n+1})}{\varpi_{n+1}}}{\dfrac{1}{(x_1-x_0)\varpi'_1} + \ldots + \dfrac{1}{(x_{n+1}-x_0)\varpi'_{n+1}}}\right|$$

$$< (b-a)\frac{\left|\dfrac{f_1(x_1)}{\varpi'_1} - \ldots + \dfrac{f_1(x_{n+1})}{\varpi'_{n+1}}\right|}{\dfrac{1}{\varpi'_1} + \ldots + \dfrac{1}{\varpi'_{n+1}}},$$

ou, plus simplement, en désignant par ρ_1 la meilleure approximation d'ordre $n-1$ de f_1 sur E_1,

$$\rho_0 < (b-a)\rho_1.$$

Il y a là un procédé de réduction qu'on peut poursuivre. Posons, en général,

$$f_k(x) = \frac{f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_{k-1})}{x - x_{k-1}},$$

et soit ρ_k la meilleure approximation d'ordre $n-k$ de $f_k(x)$ sur l'ensemble $E_k(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$, nous avons, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$\rho_k < (b-a)\rho_{k+1}$$

et, par conséquent, de proche en proche,

$$\rho_0 < (b-a)^n \rho_n.$$

Ici ρ_n est la meilleure approximation d'ordre 0 de f_n sur l'ensemble de deux points seulement $E_n(x_n, x_{n+1})$: nous avons donc immédiatement

$$\rho_n = \frac{1}{2}|f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n)|.$$

Soit, en général, M_k^r le module maximum de f_k^r sur (a, b) ; nous avons

$$\rho_n < \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) M_n^1$$

et, par conséquent,

$$\rho_0 < (x_{n+1} - x_n) \frac{1}{2}(b - a)^n M_n^1.$$

Évaluons maintenant M_k^r. Nous avons

$$f_k(x + x_{k-1}) = \frac{f_{k-1}(x + x_{k-1}) - f_{k-1}(x_{k-1})}{x} = \int_0^1 f'_{k-1}(x_{k-1} + ux)\,du,$$

$$f_k^{(r)}(x + x_{k-1}) = \int_0^1 f_{k-1}^{(r+1)}(x_{k-1} + ux)\,u^r\,du.$$

Nous en concluons, par le théorème de la moyenne,

$$M_k^r < M_{k-1}^{r+1} \int_0^1 u^r\,du = \frac{1}{r+1} M_{k-1}^{r+1};$$

puis, de proche en proche,

$$M_n^1 < \frac{M_{n-1}^2}{2} < \frac{M_{n-2}^3}{2.3} \quad \ldots \quad \frac{M_0^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!}.$$

Finalement, si nous portons cette dernière valeur dans la borne assignée à ρ_0, nous obtenons

$$\rho_0 < (x_{n+1} - x_n) \frac{(b-a)^n M}{2(n+1)!}.$$

Dans ce calcul, nous avons fait la réduction des ensembles E_0, E_1, E_2, ... en supprimant chaque fois le point extrême sur la gauche. Nous pourrions tout aussi bien supprimer le point extrême sur la droite et même tantôt celui de gauche, tantôt celui de droite. Si la suppression porte d'abord i fois sur la gauche, ensuite $n - i$ fois sur la droite, nous obtiendrons, quel que soit l'indice i,

$$\rho_0 < (x_{i+1} - x_i) \frac{(b-a)^n M}{2(n+1)!},$$

ce qui revient au théorème énoncé.

60. **Corollaire.** — *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b); si, d'autre part, pour l'ordre n, ρ est la meilleure approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E, formé de $n+2$ points de (a, b), on peut en conclure une borne inférieure de l'écart de deux points de E, pourvu que ρ soit > 0.*

En effet, soit ε un nombre positif donné < 1. Nous savons construire un polynome Q tel qu'on ait, sur tout (a, b),

$$|f - Q| < \varepsilon\rho.$$

La meilleure approximation d'ordre n de Q sur E est donc

$$\rho_0 > (1 - \varepsilon)\rho.$$

Alors, en vertu du théorème précédent, le plus petit écart δ de deux points de E est supérieur à

$$\frac{2(n+1)!}{(b-a)^n M}(1-\varepsilon)\rho,$$

où M est le module maximum de $Q^{(n+1)}$.

61. **Théorème.** — *Soient $f(x)$ une fonction continue dans (a, b), E un ensemble de $n+2$ points de E, P le polynome de degré $\leq n$ qui donne la meilleure approximation sur E, ρ cette approximation. A tout nombre positif donné η correspond un nombre positif ε qui jouit de la propriété suivante : Si un polynome Q de degré $\leq n$ donne sur E une approximation*

$$\rho' < (1+\varepsilon)\rho,$$

on aura, dans l'intervalle (a, b),

$$|P - Q| < \eta.$$

Si $\rho = 0$, on a aussi $\rho' = 0$; donc P et Q, coïncidant sur E, sont identiques.

Supposons ρ différent de 0. Nous pouvons désigner les écarts de Q aux points successifs de E par

$$\pm u_1\rho', \quad \pm u_2\rho', \quad \ldots,$$

où le signe ambigu est celui de l'écart de P. Substituons à ρ' et ρ leurs valeurs (1) et (2) dans la condition $\rho' < (1+\varepsilon)\rho$; elle

devient

$$A_0 u_0 + A_1 u_1 + \ldots + A_{n+1} u_{n+1} = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}{1 + \varepsilon},$$

d'où

$$A_0(1 - u_0) + A_1(1 - u_1) + \ldots = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(A_0 + A_1 + \ldots);$$

et, par conséquent, quel que soit k,

$$1 - u_k \leqq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{A_0 + A_1 + \ldots}{A_k}.$$

On peut, en prenant ε suffisamment petit, rendre u_k (qui est $\leqq 1$) aussi voisin qu'on veut de 1, donc rendre l'écart de Q au point x_k aussi voisin qu'on veut de celui de P. Ainsi Q peut être rendu aussi voisin qu'on veut de P sur E, donc sur (a, b), et Q peut être astreint à vérifier l'inégalité $|P - Q| < \eta$.

Remarque. — On peut appliquer le théorème précédent quand l'ensemble E varie d'une certaine manière dans (a, b). Le nombre ε (qui dépend de η) peut alors dépendre du choix des points de E. Mais on pourra le prendre indépendant de E, si l'écart de deux points de E ne peut pas tendre vers zéro. En effet, $A_1, A_2, \ldots$ ne tendent pas vers zéro non plus, $1 - u_k$ tend uniformément vers zéro avec ε et Q tend uniformément vers P sur E et, par conséquent, aussi sur (a, b). Cette condition sera certainement remplie, en vertu du corollaire précédent, si l'on sait que ρ reste supérieur à un nombre positif assigné quand E varie.

62. Théorème. — *Si un polynome Q de degré $\leqq n$ fournit sur $E(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ des écarts de signes alternés, dont les valeurs absolues (non toutes égales) sont*

$$r_0, \quad r_1, \quad \ldots, \quad r_{n+1},$$

la meilleure approximation sur E est comprise entre la plus petite et la plus grande de ces valeurs absolues, limites exclues.

La meilleure approximation de la fonction f est la même que celle de $f - Q$, à savoir

$$\rho = \frac{A_0 r_0 + A_1 r_1 + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}},$$

ce qui prouve la proposition.

63. Meilleure approximation d'ordre n sur un ensemble de plus de $n+2$ points. — *La meilleure approximation d'ordre n sur un ensemble fini F de plus de $n+2$ points, est celle sur un ensemble de $n+2$ points de F, choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.*

Soient E un ensemble de $n+2$ points, $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, faisant partie de F et satisfaisant à cette condition; P le polynome donnant la meilleure approximation, ρ, sur E. Je dis que P donne la même approximation ρ sur F.

En effet, dans le cas contraire, il existerait au moins un point ξ de F où l'écart $f - P$ serait de module $> \rho$. Si ξ tombe entre deux points consécutifs de E, x_0 et x_1 par exemple, $f - P$ a le même signe qu'au point ξ, soit en x_0, soit en x_1, par exemple en x_1. Alors, en vertu du théorème précédent, la meilleure approximation sur $(x_0, \xi, x_2, \ldots, x_{n+1})$ est plus grande que ρ, contrairement à l'hypothèse.

Si ξ est extérieur à l'intervalle (x_0, x_{n+1}), par exemple $< x_0$, on considérera l'un des deux ensembles de $n+2$ points,

$$(\xi, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \quad (\xi, x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

selon que $f - P$ prend le même signe ou des signes contraires en ξ et en x_0. On sera conduit à la même conclusion.

64. Théorème. — *La meilleure approximation d'ordre n de la fonction continue $f(x)$ dans un intervalle (a, b) est celle sur un ensemble de $n+2$ points de cet intervalle, choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.*

La meilleure approximation ρ_1 sur un ensemble

$$E_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$$

de $n+2$ points de (a, b) est donnée par la formule (2) du n° 58. Celle-ci met en évidence que ρ_1 est une fonction continue de $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans (a, b). Cette fonction admet donc un maximum ρ et l'atteint pour un ensemble déterminé E contenu dans (a, b). Alors on montre, par un raisonnement identique à celui de la

démonstration précédente, que ρ est aussi l'approximation minimum dans (a, b).

Nous avons ainsi démontré l'existence du polynome d'approximation minimum et retrouvé ses propriétés essentielles par une voie toute différente de celle utilisée au début du chapitre (n°s 55 et 56).

65. **Théorème.** — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans (a, b) et P le polynome de degré $\leqq n$ qui en donne la meilleure approximation ρ. A tout nombre positif η correspond un nombre positif ε qui jouit de la propriété suivante : Si un polynome Q de degré $\leqq n$ donne sur (a, b) une approximation*

$$\rho' < (1 + \varepsilon)\rho,$$

on aura, dans l'intervalle (a, b),

$$|P - Q| < \eta.$$

En effet, ρ est la meilleure approximation sur un certain ensemble E de $2n + 2$ points et elle est fournie par P. Or Q donne, sur E, l'approximation ρ'. Ce théorème revient donc à celui du n° 61.

66. **Calcul approché du polynome d'approximation minimum.** — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Il s'agit de déterminer, avec une approximation donnée η, le polynome de degré $\leqq n$ qui en donne la meilleure approximation ρ. Il n'existe aucun procédé qui ait un caractère pratique pour résoudre ce problème. Mais nous allons montrer que *théoriquement* sa solution dépend d'un nombre fini d'opérations, qu'on peut délimiter *a priori*.

Nous supposons que $f(x)$ n'est pas un polynome de degré $\leqq n$. Alors nous commençons par déterminer une borne inférieure, ρ_0, de la meilleure approximation dans (a, b). Nous utiliserons à cet effet l'une des règles données précédemment.

Soit P le polynome inconnu de degré $\leqq n$ qui fournit la meilleure approximation ρ dans (a, b). C'est aussi celui d'approximation minimum ρ sur un certain ensemble E (n° 64) de $n + 2$ points généralement inconnus. Le théorème du n° 60 nous permet de

déterminer une borne inférieure δ de l'écart de deux points de E. Cette borne fixée, nous pouvons, sans connaître autrement E, d'après la remarque du n° 61, faire correspondre au nombre η un nombre ε tel que, si un polynome Q donne sur E une approximation $< (1+\varepsilon)\rho$, on ait $|P - Q| < \eta$.

Soit M le module maximum de f dans (a, b). Partageons (a, b) en n parties égales. La formule de Lagrange permet d'assigner un module de continuité uniforme à un polynome Q, de degré n, dont le module ne surpasse pas 2M sur l'ensemble des $n+1$ points de subdivision. Nous pouvons donc, en prenant l'entier λ assez grand, diviser (a, b) en λn parties assez petites pour que l'oscillation de $f - Q$ soit $< \varepsilon\rho_0$ dans chacune d'elles.

Ayant divisé (a, b) en λn parties satisfaisant à cette condition, désignons par F l'ensemble des points de subdivision (a et b compris) et soit Q le polynome d'approximation minimum sur F, lequel est de module $< 2M$ et vérifie les conditions précédentes. Ce polynome Q se détermine par un nombre limité d'opérations, car il donne la meilleure approximation sur $n+2$ points de F choisis de manière à rendre cette meilleure approximation maximum, et il n'y a qu'un nombre limité de choix. Je dis que Q répond à la question et qu'on a $|Q - P| < \eta$.

En effet, Q donne sur F une approximation $\rho' \leqq \rho$; mais tout point de E tombe entre deux points consécutifs de F, entre lesquels l'oscillation de $f - Q$ est $< \varepsilon\rho_0$. Donc Q donne, sur E, une approximation $< \rho + \varepsilon\rho_0 < (1+\varepsilon)\rho$, ce qui prouve la proposition.

67. **Détermination analytique du polynome d'approximation minimum.** — Soient $f(x)$ une fonction admettant une dérivée continue $f'(x)$, et

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

le polynome qui en donne la meilleure approximation ρ dans l'intervalle (a, b). Soit

$$E(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n+1})$$

l'ensemble de $n+2$ points de (a, b) sur lequel P donne cette même meilleure approximation ρ. Supposons d'abord tous ces points différents de a et de b. Alors $f(x) - P(x)$ est un *extre-*

mum en chacun des points de E et nous avons le système de $2n+2$ équations

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x_i) - P(x_i) - \rho = 0 \\ f(x_i) - P(x_i) - \rho = 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1),$$

qui peut servir à déterminer les $2n+2$ inconnues du problème : x_0, $x_1, \ldots, x_{n+1}$; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et ρ.

Si E contenait un des points a, b ou tous les deux, cela ferait une ou deux inconnues en moins, mais, en même temps, une ou deux équations seraient à supprimer dans la seconde série. Le problème est donc généralement déterminé.

Si $f(x)$ est un polynome, le système (1) est algébrique. Il peut, comme dans le cas général, admettre un nombre plus ou moins grand de solutions. Mais il n'y en a qu'une seule qui minime ρ, et c'est celle qui répond à la question. Lorsque le système (1) est algébrique, on peut, pour le résoudre, employer toutes les méthodes particulières d'approximation propres à ce cas.

Le cas général peut être ramené au précédent, comme M. Borel l'a déjà fait observer [1]. En effet, soit R un polynome voisin de f. Soient P le polynome qui donne la meilleure approximation ρ de f, Q celui qui donne la meilleure approximation ρ' de R. Je dis que $|P - Q|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut avec $|f - R|$. En effet, si $|f - R|$ est $< \varepsilon$ sur (a, b), Q donne de f une approximation $< \rho + \varepsilon$ sur (a, b) et, en particulier, sur l'ensemble E où P est d'approximation ρ, donc Q est aussi voisin qu'on veut de P (n° 61).

Il suit de là que le calcul approché de P se ramène à celui de la meilleure approximation d'un polynome R suffisamment voisin de f, c'est-à-dire au calcul précédent.

M. Bernstein a fait connaître un théorème qui peut être utile dans la question qui nous occupe, et que nous allons exposer.

68. Théorème de M. Bernstein. — Nous savons que l'approximation minimum sur (a, b) est la même que sur un certain ensemble E de $n+2$ points, mais il peut y avoir plusieurs ensembles vérifiant cette condition. Nous supposerons, dans ce

---

[1] *Leçons sur la théorie des fonctions*.

qui suit, que cet ensemble est unique. Nous distinguerons les quatre cas suivants : E est de la première classe s'il ne contient ni a ni b, de la seconde s'il contient a seul, de la troisième s'il contient b seul, de la quatrième s'il contient a et b. Voici maintenant le théorème de M. Bernstein [1] :

THÉORÈME. — *Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions analytiques régulières sur le segment ab, λ un paramètre $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$. Posons*

$$f(x, \lambda) = \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\psi(x).$$

Désignons par $P(x, \lambda)$ le polynome d'approximation minimum de $f(x, \lambda)$ sur (a, b), par E_λ l'ensemble sur lequel l'approximation est précisément l'approximation minimum $\rho(\lambda)$. Si l'ensemble E_λ est unique et appartient toujours à la même classe quel que soit λ; si, en outre, la dérivée seconde de la fonction

$$F(x) = f(x, \lambda) - P(x, \lambda)$$

ne s'annule en aucun point de E_λ, alors les $2n + 2$ inconnues du problème, à savoir $\rho(\lambda)$, les $n + 2$ points x_i et les $n + 1$ coefficients a_k sont des fonctions analytiques régulières de λ sur le segment 01.

Supposons, pour fixer les idées, que E_λ soit toujours de la première classe. Alors les $2n + 2$ inconnues sont déterminées par le système (1),

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x_i) = \rho = 0 \\ F'(x_i) = 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

Formons son jacobien, qui est d'ordre $2n + 2$. Ses $n + 1$ premières lignes sont respectivement $(i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1)$,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_{n-1}}, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial a_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial a_n}, \quad \pm 1,$$

se réduisant à

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad F'(x_i), \quad \ldots, \quad 0, \quad 1, \quad x_i, \quad x_i^2, \quad \ldots, \quad x_i^n, \quad \pm 1.$$

---

[1] M. Bernstein formule un énoncé plus général qui s'étend aux polynomes à exposants non entiers (*Sur la meilleure approximation des fonctions continues*).

Les $n+1$ dernières lignes sont ($k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$)

$$\frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_{n+1}}, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_n}, \quad 0,$$

se réduisant à

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad F''(x_k), \quad \ldots, \quad 0, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_n}, \quad 0.$$

Ce jacobien est donc

$$J = F''(x_0) \ldots F''(x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n & +1 \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n & -1 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^n & +1 \\ . & .. & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Nous savons que ce déterminant est différent de zéro, car c'est celui dont dépend le calcul de la meilleure approximation sur l'ensemble E. Donc J ne s'annule pas, si les facteurs $F''(x_k)$ ne s'annulent pas. Le théorème est ainsi établi.

Voici maintenant comment le théorème de M. Bernstein s'applique au calcul de la meilleure approximation d'une fonction analytique donnée $\varphi(x)$, dans l'intervalle (a, b).

On suppose que l'on connaisse la meilleure approximation $\rho(0)$ d'une fonction analytique $\psi(x)$, voisine de $\varphi(x)$, ainsi que le polynome $P(x, 0)$ et l'ensemble E_0 correspondants. On forme la fonction

$$f(x) = \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\psi(x),$$

qui devra satisfaire aux conditions du théorème précédent. On connaît donc, par hypothèses, les valeurs initiales (pour $\lambda = 0$) des $2n+2$ inconnues du problème, ρ, a_i, x_k, et il s'agit d'en trouver les valeurs pour $\lambda = 1$, auquel cas $f(x) = \varphi(x)$.

On remarque que les valeurs initiales des dérivées des ordres successifs de ρ, a_i, x_k par rapport à λ, s'obtiennent, de proche en proche, en dérivant successivement les équations (1) par rapport à λ et posant chaque fois $\lambda = 0$. Les dérivées d'un même ordre s'obtiennent par la résolution d'un système linéaire dont le déterminant J est toujours le même. On peut donc écrire les développements de ρ, a_i, x_k suivant les puissances de λ par la formule de Maclaurin. Si ces développements convergent pour $\lambda = 1$, le problème est résolu. Dans le cas contraire, on connaît un élément analytique de chacune des fonctions ρ, a_i, x_k; ce qui suffit théoriquement pour les déterminer entièrement.

Si la fonction $\psi(x)$ est bien choisie, les développements de Maclaurin seront rapidement convergents, mais il est clair que c'est un tel choix qui fait toute la difficulté de la question.

M. Bernstein a fait la remarque que voici :

Les expressions approchées de P *et de* ρ, *pour* $\lambda = 1$, *qu'on obtient en bornant la série de Maclaurin à ses deux premiers termes, sont respectivement le polynome d'approximation minimum et l'approximation minimum de* $\varphi(x)$ *sur l'ensemble* E_0.

Pour le montrer, dérivons une première fois les $n+1$ premières équations du système (1), en observant que $F'(x_i)$ est nul; il vient ($i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$)

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \lambda} \pm \rho'(\lambda) = \varphi(x_i) - \psi(x_i) - \frac{\delta P(x_i)}{\delta \lambda} \pm \rho'(\lambda) = 0,$$

mais la caractéristique δ indique une dérivation dans laquelle les coefficients a seuls sont considérés comme dépendant de λ. Faisons $\lambda = 0$; il vient, x_i appartenant à E_0,

$$\varphi(x_i) - \psi(x_i) - \frac{\delta P(x_i, 0)}{\delta \lambda} \pm \rho'(0) = 0.$$

D'autre part, on a, par hypothèse, sur l'ensemble E_0,

$$\psi(x_i) - P(x_i, 0) \pm \rho(0) = 0:$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\varphi(x_i) - \left[P(x_i, 0) + \frac{\delta P(x_i, 0)}{\delta \lambda}\right] \pm [\rho(0) + \rho'(0)] = 0$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

Ces équations, relatives à E_0, mettent en évidence que

$$P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial \lambda}$$

est le polynome d'approximation minimum de $\varphi(x)$ sur l'ensemble E_0 et que cette approximation est $\rho(0) + \rho'(0)$. C'est le théorème énoncé. Il s'ensuit évidemment que l'on a

$$\rho(1) \overline{\geqq} \rho(0) + \rho'(0).$$

Cette dernière remarque est encore due à M. Bernstein.

CHAPITRE VII.

APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE MINIMUM.

69. Propriétés des expressions trigonométriques d'ordre n. — Les théorèmes relatifs aux polynomes d'approximation minimum s'étendent aux expressions trigonométriques et se démontrent de la même manière. Mais il faut, au préalable, étendre aux expressions trigonométriques les propriétés algébriques des polynomes sur lesquelles reposent les démonstrations. Voici ces propriétés :

1° *Une expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$ ne peut avoir plus de $2n$ racines non équivalentes, et cela en tenant compte de l'ordre de multiplicité des racines.*

Cette propriété a été démontrée au n° 30.

2° *Deux expressions d'ordres $\leqq n$ qui coïncident en $2n+1$ points non équivalents sont identiques. Autrement dit, une expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$ est déterminée par ses valeurs en $2n+1$ points non équivalents.*

En effet, leur différence, ayant $2n+1$ racines, est identiquement nulle.

3° *Deux expressions d'ordres $\leqq n$ qui ont $2n$ racines non équivalentes communes sont les mêmes à un facteur constant près.*

En effet, soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux expressions d'ordre $\leqq n$ ayant $2n$ racines communes et ne s'annulant pas au point a; la différence

$$P(x)Q(a) - Q(x)P(a)$$

admet les mêmes racines et une de plus a, en tout $2n+1$ racines, donc elle est identiquement nulle.

4° *On peut toujours construire une expression trigonométrique d'ordre n qui admet 2n racines arbitrairement données.*

S'il n'y a que deux racines x_1 et x_2, l'expression du premier ordre

$$\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x_1-x_2}{2} - \cos\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]$$

satisfait à la question.

Si x_1 et x_2 ne sont pas équivalents, ces racines sont simples et l'expression change de signe quand x passe par ces valeurs.

S'il y a $2n$ racines données $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, le produit d'un nombre pair de facteurs

$$\prod_i \sin\frac{x-x_i}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

est une expression entière et répond encore à la question.

5° *Une expression d'ordre $\leq n$ peut se déterminer par les $2n+1$ valeurs arbitrairement données qu'elle prend en $2n+1$ points non équivalents, et elle s'exprime par une formule analogue à celle de Lagrange.*

Désignons les points par $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ et soit $f(x_i)$ la valeur assignée au point x_i. Formons l'expression (celle-ci non entière, car le nombre des facteurs est impair)

$$S(x) = \prod_i \sin\frac{x-x_i}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n+1);$$

l'expression entière d'ordre n,

$$S(x)\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2\sin\frac{x-x_i}{2}}\,\frac{f(x_i)}{S'(x_i)}$$

répond à la question et remplace la formule de Lagrange (n° 53). Cette nouvelle formule conduit, de la même manière, aux conclusions suivantes :

6° *Deux expressions d'ordre $\leq n$ qui prennent des valeurs infiniment voisines en $2n+1$ points donnés, non équivalents, sont infiniment voisines.*

7° Une expression d'ordre n, dont les coefficients sont variables, mais qui est bornée sur un ensemble de $2n+1$ points donnés, non équivalents, a tous ses coefficients bornés.

70. Expression trigonométrique d'approximation minimum. — L'expression trigonométrique qui donne l'approximation minimum d'une fonction périodique $f(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x, possède des propriétés analogues à celles du polynome d'approximation minimum. La généralisation des définitions et de la plupart des démonstrations est immédiate. Il suffira d'énoncer les théorèmes, quand les démonstrations pourront se calquer sur les précédentes. Voici les principaux de ces théorèmes :

1° *Il existe, pour chaque ordre n, une expression trigonométrique d'approximation minimum.*

2° *Si l'expression $T(x)$ d'ordre n est d'approximation minimum pour la fonction périodique $f(x)$, on peut assigner $2n+2$ points, contenus à l'intérieur d'une même période d'amplitude 2π, où l'écart $f-T$ atteint ses valeurs extrêmes $\pm\varepsilon$ avec alternance de signes d'un point au suivant.*

Il faut ici préciser quelques points de la démonstration.

Divisons une période, c'est-à-dire un intervalle donné d'amplitude 2π, en intervalles assez petits pour que l'écart $\varphi(x) = f-T$ ne s'annule dans aucun des intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ où il atteint ses valeurs extrêmes. Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ les unités du signe de $\varphi(x)$ dans chacun de ces intervalles. Soit δ_{m+1} l'intervalle congru à δ_1 dans la période suivante, et $\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_1$ l'unité du signe de $\varphi(x)$ dans δ_{m+1}. Le théorème énoncé revient à dire que la suite

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_1$$

contient $2n+2$ variations de signes. D'ailleurs, les termes extrêmes étant les mêmes, elle ne peut en contenir qu'un nombre pair.

Supposons, par impossible, que la suite ne contienne que $2k < 2n$ variations. Soit $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$ l'une quelconque d'entre elles. Assignons un point ξ intermédiaire entre les deux intervalles correspondants δ_i et δ_{i+1}, qui sont nécessairement non contigus.

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2k}$ la suite des $2k$ points ainsi choisis et qui sont tous intérieurs à la période. La fonction entière d'ordre $\leqq n$,

$$\psi(x) = \varepsilon_1 \sin\frac{\xi_1 - x}{2} \sin\frac{\xi_2 - x}{2} \ldots \sin\frac{\xi_{2k} - x}{2}$$

aura le signe de φ dans chaque intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$. Il en résulte, comme dans le cas des polynomes d'approximation, que l'expression d'ordre $\leqq n$, $T + \varepsilon\psi$, donnerait une approximation meilleure que T, à condition de donner au nombre positif ε une valeur suffisamment petite.

3° *L'expression d'ordre $\leqq n$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ est unique.*

4° *La propriété 2° est caractéristique : une expression qui fournit des écarts de signes alternés et de module égal à l'approximation correspondante en $2n + 2$ points consécutifs contenus à l'intérieur d'une période, n'est autre que l'expression d'approximation minimum.*

71. Borne inférieure de la meilleure approximation trigonométrique. — A la règle du n° 57 pour les polynomes correspond la règle suivante pour la représentation trigonométrique :

Soient $f(x)$ une fonction de période 2π et S une expression trigonométrique d'ordre n. Si $f - S$ prend, avec des signes alternés, des valeurs absolues $\geqq \rho'$ en $2n + 2$ points consécutifs et non équivalents d'une même période, alors ρ' est une borne inférieure de l'approximation minimum.

72. Meilleure approximation d'ordre n sur un ensemble de $2n - 2$ points. — Les résultats obtenus dans le Chapitre précédent, quant à la représentation par polynomes sur un ensemble de points, s'étendent à la représentation trigonométrique.

Une expression trigonométrique d'ordre n peut être mise sous la forme

$$R(x) = \sum_{-n}^{n} a'_k e^{kix},$$

avec la condition que les coefficients a'_k et a'_{-k} soient des imaginaires conjuguées pour que R soit réel.

Considérons un ensemble E de $2n+2$ points,

$$(E) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1} < x_{2n+2},$$

non équivalents et contenus dans une même période 2π. Soit $f(x)$ une fonction; nous allons prouver que, parmi les expressions $R(x)$ d'ordre $\leq n$, il en est une $T(x)$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E. Cette expression T est dite d'approximation minimum sur E, et nous montrerons qu'elle est unique.

Proposons-nous d'abord le problème plus général de déterminer $R(x)$ et l'approximation correspondante ρ' sur E, par la condition que les $2n+2$ écarts aux points successifs de E soient de mêmes signes et dans le même rapport que les $2n+2$ nombres donnés

$$u_1, \quad -u_2, \quad +u_3, \quad \ldots, \quad -u_{2n+2}.$$

Les lettres u désignent des nombres positifs ou négatifs de modules ≤ 1, mais l'un au moins de module 1. Ils sont précédés d'un signe alternatif pour la commodité des calculs ultérieurs.

Nous avons donc à déterminer ρ' et les $2n+1$ coefficients a de $R(x)$ par les $2n+2$ équations linéaires

$$f(x_m) = \pm u_m \rho' - \sum_{k=-n}^{n} a_k' e^{kix_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n+1).$$

Ce système a pour déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -u_1 & e^{-nx_1 i} & e^{-(n-1)x_1 i} & \ldots & e^{nx_1 i} \\ -u_2 & e^{-nx_2 i} & e^{-(n-1)x_2 i} & \ldots & e^{nx_2 i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Soient $A_1, -A_2, +A_3, \ldots$ les mineurs relatifs aux éléments de la première colonne. Nous avons

$$D = A_1 u_1 - A_2 u_2 + \ldots + A_{2n+2} u_{2n+2}.$$

Calculons le coefficient A_k. Nous avons, en excluant la lettre x_2,

$$A_k = \begin{vmatrix} e^{-nx_1 i} & e^{-(n-1)x_1 i} & \ldots & e^{nx_1 i} \\ e^{-nx_3 i} & e^{-(n-1)x_3 i} & \ldots & e^{nx_3 i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$A_k = e^{-n(x_1+x_3+\ldots)} \begin{vmatrix} 1 & e^{x_1 i} & \ldots & e^{2nx_1 i} \\ 1 & e^{x_3 i} & \ldots & e^{2nx_3 i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\prod_k$ un produit qui s'étend à toutes les combinaisons de deux indices λ, μ différents de k avec la condition $\lambda > \mu$. Il vient

$$\begin{aligned} A_k &= e^{-n(x_1+x_2+\ldots)i} \prod_k (e^{x_\lambda i} - e^{x_\mu i}) \\ &= \prod_k e^{-\frac{x_\lambda + x_\mu}{2} i} (e^{x_\lambda i} - e^{x_\mu i}) \\ &= \prod_k 2i \sin \frac{x_\lambda - x_\mu}{2}. \end{aligned}$$

Désignons encore par ω le nombre des facteurs du produit $\prod_k$ (nombre qui est indépendant de k), nous obtenons

$$\begin{aligned} A_k &= (2i)^\omega A'_k, \\ A'_k &= \prod_k \sin \frac{x_\lambda - x_\mu}{2}. \end{aligned}$$

Tous les facteurs étant positifs, A'_k est un nombre réel et positif.

Résolvons maintenant le système par rapport à ρ'; il vient

$$\rho' = \frac{A_1 f(x_1) - A_2 f(x_2) + \ldots - A_{2n+2} f(x_{2n+2})}{A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{2n+2} u_{2n+2}};$$

et, en supprimant le facteur commun $(2i)^\omega$,

$$(1) \qquad \rho' = \frac{A'_1 f(x_1) - A'_2 f(x_2) + \ldots - A'_{2n+2} f(x_{2n+2})}{A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \ldots + A'_{2n+2} u_{2n+2}}.$$

Les quantités A' sont réelles, positives et non nulles. Cette formule, entièrement analogue à la formule (1) du n° 58 concernant les polynomes, conduit aux mêmes conséquences.

L'approximation minimum se réalise en faisant tous les u égaux à ± 1 et du même signe que le numérateur de (1). L'approximation minimum ρ sur E sera donnée par la formule

$$(2) \qquad \rho = \frac{|A'_1 f(x_1) - A'_2 f(x_2) - \ldots - A'_{2n+2} f(x_{2n+2})|}{A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_{2n+2}}.$$

Ces formules conduisent, comme dans le cas des polynomes, aux théorèmes suivants :

1° *Il existe une expression d'ordre $\leqq n$ et une seule donnant la meilleure approximation sur un ensemble* E *de $2n+2$ points; elle fournit des écarts de même module et de signes contraires*

en deux points consécutifs de E, *et cette propriété la caractérise.*

2° *L'expression d'ordre* n *qui donne la meilleure approximation sur un ensemble* E *de plus de* $2n+2$ *points* [*ou dans un intervalle* (a, b)], *est celle qui donne la meilleure approximation sur* $2n+2$ *points de* E [*ou de* (a, b)], *choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.*

73. Théorème. — *Supposons que* $f(z)$, *de période* 2π, *soit une fonction analytique de* $z = x + yi$, *holomorphe dans la bande comprise entre les deux horizontales* $y = \pm b$, *et de module* $< M$ *sur ces droites; alors si* f *a pour meilleure approximation* ρ_0 *sur un ensemble* E_0 *de* $2n+2$ *points réels non équivalents, le plus petit écart* δ *de deux de ces points vérifie la condition*

$$\delta < \rho_0 \frac{16}{M} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}\right)^{2n+2}.$$

Nous pouvons supposer que les points $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$ de E_0 satisfassent à la condition

$$0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2n+2} < 2\pi.$$

Appelons, en abrégé, *distance de deux points* x_i et x_k de E l'expression

$$\left|\sin \frac{x_i - x_k}{2}\right|$$

et désignons par ϖ_k le produit des distances de x_k aux autres points de E. La formule (2) nous donne

$$\rho_0 = \frac{\left|\dfrac{f(x_1)}{\varpi_1} - \dfrac{f(x_2)}{\varpi_2} + \ldots - \dfrac{f(x_{2n+2})}{\varpi_{2n+2}}\right|}{\dfrac{1}{\varpi_1} + \dfrac{1}{\varpi_2} + \ldots + \dfrac{1}{\varpi_{2n+2}}}.$$

Soit E_1 l'ensemble obtenu en supprimant l'un des points extrêmes de E_0, par exemple x_1; posons

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{\sin \dfrac{x - x_1}{2}};$$

accentuons les produits relatifs à E_1. Nous avons, comme pour les polynomes (n° 59) et en observant que les sinus sont de modules ± 1,

$$\rho_0 = \rho_1 = \frac{\left|\frac{f(x_2)}{\varpi_2} - \frac{f(x_3)}{\varpi'_3} + \ldots - \frac{f(x_{2n+2})}{\varpi'_{2n+2}}\right|}{\frac{1}{\varpi'_2} + \frac{1}{\varpi'_3} + \ldots + \frac{1}{\varpi'_{2n+2}}}.$$

Cette fois, le nombre ρ_1, défini par cette formule, n'est pas la meilleure approximation de f_1 sur E_1, parce que le nombre des points de E_1 est impair. Mais cela n'empêche pas de poursuivre la réduction, parce que ρ_1 ne change pas quand on remplace, dans cette formule, $f(x)$ par $f(x) - a$. On a, en effet,

$$\frac{1}{\varpi_2} - \frac{1}{\varpi'_3} + \ldots + \frac{1}{\varpi'_{2n+2}} = 0,$$

parce que cette somme ne diffère que par un facteur non nul du développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-(n-1)x_1 i} & e^{-(n-2)x_1 i} & \ldots & e^{nx_1 i} \\ 1 & e^{-(n-1)x_2 i} & e^{-(n-2)x_2 i} & \ldots & e^{nx_2 i} \\ . & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

suivant les éléments de la première colonne. On s'en assure par des calculs tout pareils à ceux du n° 72. Or ce déterminant est nul, parce que la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne est identique à la première.

Posons donc, en général,

$$f_k(x) = \frac{f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_k)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}.$$

Désignons par ρ_k l'expression analogue à ρ_0 et ρ_1, mais relative à l'ensemble $E_k(x_{k+1}, \ldots, x_{2n+2})$, et qui est la meilleure approximation d'ordre $n - \frac{k}{2}$ de $f_k(x)$ sur E_k lorsque k est pair. Nous avons

$$\rho_k < \rho_{k+1}$$

et, de proche en proche,

$$\rho_0 < \rho_{2n}.$$

Ici ρ_{2n} est la meilleure approximation d'ordre o de f_{2n} sur l'ensemble de deux points seulement $E_{2n}(x_{2n+1}, x_{2n+2})$. Nous avons

donc

$$\rho_{2n} = \frac{1}{2}\{f_{2n}(x_{2n+2}) - f_{2n}(x_{2n+1})\}.$$

Soit, en général, M'_{2n} le module maximum de f_{2n} *sur l'axe réel*: il vient ainsi

$$\rho_0 < \rho_{2n} < |x_{2n+2} - x_{2n+1}| \frac{M'_{2n}}{2}.$$

Il faut maintenant évaluer M_{2n}. Désignons, en général, par M_k le module maximum de f_k *dans la bande* comprise entre les horizontales $y = \pm b$, maximum atteint sur ces droites puisque f_k est holomorphe et périodique. La formule

$$f_k(z + x_k) = \frac{f_{k-1}(z - x_k) - f_{k-1}(x_k)}{\sin\frac{1}{2}z}$$

donne immédiatement

$$M_k < \frac{2M_{k-1}}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}b};$$

d'où, de proche en proche, M désignant M_0,

$$M_{2n} < \left(\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}b}\right)^{2n} M.$$

Pour évaluer la dérivée, désignons par C le contour du rectangle compris entre les deux abscisses $x \pm \pi$ et les deux ordonnées $\pm b$. On a, par la théorie des résidus,

$$f_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_{2n}(z)\frac{1}{2}\cot\frac{z-x}{2}\,dz,$$

$$f'_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_{2n}(z)\frac{dz}{4\sin^2\frac{z-x}{2}}.$$

Mais les intégrales sur les côtés verticaux se détruisent (à cause de la périodicité), les intégrales sur les côtés horizontaux $y = \pm b$ subsistent seules; et il vient, par le théorème de la moyenne,

$$M'_{2n} < 2\frac{M_{2n}}{\left(2\operatorname{sh}\frac{b}{2}\right)^2} < \frac{1}{2\operatorname{sh}^2\frac{b}{2}}\left(\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{b}{2}}\right)^{2n} M.$$

On porte cette expression dans la borne de ρ_0, il vient

$$\rho_0 < (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n+2} \frac{M}{16}.$$

On peut aussi faire la réduction de l'ensemble en retranchant les points sur la droite, ou encore sur les deux extrémités successivement. On a ainsi, quel que soit i,

$$\rho_0 < (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n+2} \frac{M}{16},$$

ce qui revient au théorème énoncé.

74. **Corollaire.** — *Soit $f(x)$ continue et périodique; si sa meilleure approximation d'ordre n est $\rho \neq 0$ sur un ensemble* E *de $2n+2$ points non équivalents, on peut en conclure une borne inférieure de l'écart de deux points de* E.

En effet, soit ε un nombre positif $< \rho$. Nous pouvons construire une expression trigonométrique S d'un certain ordre, telle qu'on ait, sur l'axe réel,

$$|f - S| < \rho - \varepsilon.$$

La meilleure approximation d'ordre n de S sur E est donc

$$\rho_0 > \rho - \varepsilon.$$

Alors, en vertu du théorème précédent, le plus petit écart δ de deux points de E est supérieur à

$$(\rho - \varepsilon) \frac{16}{M} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \right)^{2n+2},$$

où M est le maximum du module de $S(z)$ sur les droites $y = \pm b$. Le choix de b reste arbitraire. On le choisira de manière à rendre cette borne aussi grande que possible.

75. **Détermination de la meilleure approximation d'ordre n.** — La détermination de la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n, sur l'axe réel, d'une fonction périodique donnée $f(x)$

est un problème analogue à celui de la détermination du polynome d'approximation minimum dans un intervalle. Il se résout, au degré d'exactitude assigné, au moyen d'un nombre limité d'opérations que l'on peut fixer *a priori*. La méthode se justifie, comme dans le cas des polynomes, en s'appuyant sur les théorèmes correspondants, que nous avons établis ci-dessus. Il est inutile de reprendre cette question dans le détail.

Observons enfin que le théorème de M. Bernstein (n° 68) s'étend, sans difficulté aucune, à la représentation trigonométrique, et peut y rendre les mêmes services que dans la recherche du polynome d'approximation minimum. Cette extension n'a pas été faite par M. Bernstein, mais elle ne présente aucune difficulté.

76. Meilleure approximation sur un ensemble de points équidistants. — Revenons d'abord à la meilleure approximation ρ sur un ensemble E de $2n+2$ points

$$(\mathrm{E}) \qquad x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2n+2},$$

non équivalents et intérieurs à une même période, c'est-à-dire à un intervalle d'origine arbitraire et d'amplitude 2π.

Désignons par $\mathrm{S}(x)$ l'expression entière

$$\mathrm{S}(x) = \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{2n+2}}{2}$$

et par Π le produit, étendu à tous les couples d'indices λ, μ, vérifiant les conditions $\mu < \lambda \leqq 2n+2$,

$$\prod \sin\frac{x_\lambda - x_\mu}{2};$$

nous aurons (n° 72)

$$\Lambda_\lambda = \prod_k \sin\frac{x_\lambda - x_\mu}{2} = (-1)^k\,\frac{\Pi}{\mathrm{S}'(x_\lambda)}.$$

La formule (2), du n° 72, nous donne donc la suivante :

$$\pm\rho = \frac{\dfrac{f(x_1)}{\mathrm{S}'(x_1)} + \dfrac{f(x_2)}{\mathrm{S}'(x_2)} + \ldots + \dfrac{f(x_{2n+2})}{\mathrm{S}'(x_{2n+2})}}{\dfrac{1}{\mathrm{S}'(x_1)} - \dfrac{1}{\mathrm{S}'(x_2)} - \ldots - \dfrac{1}{\mathrm{S}'(x_{2n+2})}},$$

qui est encore applicable au cas général (que les points soient équidistants ou non).

Arrivons maintenant au cas particulier qui nous intéresse. Supposons que les points de l'ensemble E partagent la période en parties égales, de sorte que l'équidistance des points $x_1, x_2, \ldots$ soit $\frac{\pi}{n+1}$. Dans ce cas, $S(x)$ admet les mêmes racines que la fonction

$$\sin(n+1)(x-x_1)$$

et le rapport des deux fonctions est borné, car on vérifie de suite qu'il tend vers une limite finie quand x tend vers l'infini imaginaire. Donc le rapport des deux fonctions est une constante h et l'on a

$$S(x) = h \sin(n+1)(x-x_1).$$

L'équidistance des points étant $\frac{\pi}{n+1}$, on en conclut

$$S'(x_1) = (n+1)h, \qquad S'(x_2) = -(n+1)h, \qquad \ldots.$$

Ces valeurs sont de même module et de signes alternés. La valeur de la meilleure approximation ρ se réduit à

$$\rho = \frac{|f(x_1) - f(x_2) + \ldots - f(x_{2n+2})|}{2n+2}.$$

De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation de $f(x)$, de période 2π, par une expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$, sur un ensemble de $2n+2$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$, non équivalents, qui partagent la période en $2n+2$ parties égales, est la moyenne arithmétique des $2n+2$ valeurs $f(x_1)$, $-f(x_2)$, $+f(x_3)$, ..., $-f(x_{2n+2})$. Cette moyenne est donc une borne inférieure de la meilleure approximation d'ordre n pour x réel quelconque.

Cette moyenne peut être mise sous une forme intéressante qui se rattache à la série de Fourier. Supposons $f(x)$ développable en série de Fourier convergente :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Si nous posons

$$a'_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad a'_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2},$$

nous pouvons écrire

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k e^{kxi}.$$

Considérons maintenant l'ensemble des points équidistants x_1, $x_2, \ldots, x_{2n+2}$ et supposons d'abord $x_1 = 0$, auquel cas

$$x_m = \frac{(m-1)\pi}{n+1}.$$

Il vient

$$\sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} f(x_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}}.$$

Si k est un multiple impair de $n+1$, on a

$$\sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}} = \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} (-1)^{m-1} = 2n+2.$$

Dans tous les autres cas, on a

$$\sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}} = \frac{e^{2k\pi i} - 1}{-e^{\frac{k\pi i}{n+1}} - 1} = 0.$$

Il vient donc

$$\sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^m f(x_m) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} a'_{(2\lambda+1)(n+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{(2\lambda+1)(n+1)}.$$

De là, le théorème suivant :

Si $f(x)$ périodique est développable en série de Fourier convergente, la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n sur l'ensemble E *des $2n+2$ points,*

$$(\mathrm{E}) \qquad 0, \quad \frac{\pi}{n+1}, \quad \frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n+1)\pi}{n+1},$$

a pour expression

$$\pm \rho = a_{n+1} - a_{3(n+1)} + a_{5(n+1)} + \ldots,$$

où les a sont les constantes de Fourier de la fonction $f(x)$.

Le cas où le premier point de l'ensemble E est x_1 (au lieu de o) se ramène au précédent par le changement de x en $x + x_1$. Or, on a

$$f(x + x_1) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_k \cos k x_1 + b_k \sin k x_1) \cos k x$$
$$+ \sum_1^\infty (- a_k \sin k x_1 + b_k \cos k x_1) \sin k x.$$

De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation d'ordre n de $f(x)$ sur l'ensemble E *des $2n + 2$ points,*

$$(\mathrm{E}) \qquad x_1, \quad x_1 + \frac{\pi}{n+1}, \quad x_1 + \frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad x_1 + \frac{(2n+1)\pi}{n+1},$$

a pour expression

$$= \rho = \sum_{\lambda=0}^\infty [a_{(2\lambda+1)(n+1)} \cos(2\lambda+1)(n+1)x_1$$
$$+ b_{(2\lambda+1)(n+1)} \sin(2\lambda+1)(n+1)x_1].$$

77. Nouvelle borne inférieure de la meilleure approximation trigonométrique. — Revenons encore une fois à la meilleure approximation ρ pour l'ensemble de toutes les valeurs réelles de x. Le théorème qui termine le numéro précédent en fournit une borne inférieure quel que soit x_1, et cette borne se présente sous forme d'une série trigonométrique en x_1. Choisissons x_1 de manière à majorer le premier terme et remplaçons tous les suivants par leur borne inférieure pour x_1 quelconque; nous obtenons le théorème suivant :

La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n pour une fonction périodique, développable en série de Fourier convergente, admet la borne inférieure

$$\sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} - \sum_{\lambda=1}^\infty \sqrt{a_{(2\lambda+1)(n+1)}^2 + b_{(2\lambda+1)(n+1)}^2}$$

pourvu que cette expression soit positive.

Les diverses bornes que nous venons de signaler sont distinctes de celles rencontrées antérieurement.

78. Application des résultats précédents à la meilleure approximation par polynomes. — L'approximation de $f(x)$ par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$ revient à l'approximation trigonométrique de $f(\cos\varphi)$. Nous venons de voir que la meilleure approximation de $f(\cos\varphi)$ sur l'ensemble

$$0, \quad \frac{\pi}{n+1}, \quad \frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n+1)\pi}{n+1}$$

a pour valeur

$$\pm\rho = \frac{1}{2n+2}\left[f(\cos 0) - f\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right) + \ldots - f\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{n+1}\right)\right].$$

Sauf $f(\cos 0)$ et $f(\cos\pi)$, les termes sont deux à deux égaux et de même signe [ceux à égale distance des extrêmes quand on supprime $f(\cos 0)$]. De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation de $f(x)$, par un polynome de degré $\leqq n$ sur l'ensemble E *des $n+2$ points,*

$$(\mathrm{E}) \qquad 1, \quad \cos\frac{\pi}{n+1}, \quad \cos\frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad \cos\frac{n\pi}{n+1}, \quad -1,$$

a pour expression

$$\pm\rho = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{2}f(1) - f\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right) + f\left(\cos\frac{2\pi}{n+1}\right) - \ldots \right.$$
$$\left. \pm f\left(\cos\frac{n\pi}{n+1}\right) \mp \frac{1}{2}f(-1)\right].$$

En même temps cette expression est une borne inférieure de la meilleure approximation dans l'intervalle $(-1, +1)$ contenant E. *On peut aussi lui donner la forme*

$$\pm\rho = a_{n+1} + a_{3n+1} + a_{5n+1} + \ldots,$$

où les a sont les constantes de Fourier de $f(\cos\varphi)$, qui est alors supposée développable en série de Fourier convergente [1].

---

[1] M. S. Bernstein donne des résultats analogues, sauf quelques inadvertances de calcul (*Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues*, n° 45).

79. Exemples simples d'approximation trigonométrique minimum. — L'étude des fonctions analytiques fournit des exemples remarquables d'approximation minimum sur lesquels nous reviendrons plus loin. Mais nous pouvons indiquer, dès maintenant, quelques exemples instructifs.

1° L'expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$ qui donne la meilleure approximation du terme d'ordre $n+1$,

$$a\cos(n+1)x + b\sin(n-1)x,$$

est identiquement nulle.

En effet, posons $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$; cette dernière expression prend la forme

$$r\cos(n+1)(x-\alpha).$$

Elle prend $2n+2$ fois ses valeurs extrêmes $\pm r$ avec alternance de signes en des points intérieurs à une même période. Ce sont les valeurs de l'écart pour l'expression approchée $T = 0$. Donc 0 est d'approximation minimum.

2° Le même raisonnement montre que l'on connaît aussi la meilleure approximation d'ordre n pour la fonction d'ordre $n+1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

L'expression d'approximation minimum est

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx;$$

l'écart est

$$\varphi(x) = a_{n+1}\cos(n+1)x + b_{n+1}\sin(n+1)x$$

et l'approximation a pour valeur

$$\rho = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}.$$

3° Un exemple d'un autre genre nous est donné par la fonction sans dérivée de Weierstrass. Nous allons montrer qu'on en connaît les expressions les plus approchées pour tous les ordres [1].

Soient a un nombre positif < 1 et b un nombre entier impair > 1;

---

[1] S. Bernstein, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 25 novembre 1912, p. 1063.

la fonction de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cos b^m x$$

admet, comme expression d'approximation minimum d'ordre n, la somme des $k+1$ premiers termes de cette série, à savoir

$$T(x) = \sum_{0}^{k} a^m \cos b^m x,$$

où k est déterminé par la condition

$$b^k \leqq n < b^{k+1}.$$

En effet, l'écart, qui a pour expression

$$\sum_{k+1}^{\infty} a^m \cos b^m x,$$

acquiert ses valeurs extrêmes avec alternance de signe aux $2b^{k+1}$ points consécutifs

$$x_\lambda = \frac{\lambda\pi}{b^{k+1}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 2b^{k+1})$$

et l'approximation correspondante est

$$\varepsilon = \sum_{k+1}^{\infty} a^m = \frac{a^{k+1}}{1-a}.$$

CHAPITRE VIII.

FONCTIONS ANALYTIQUES PRÉSENTANT DES SINGULARITÉS POLAIRES.

80. **Correspondance entre les séries de Fourier et de Laurent.** — Soit $f(z)$ une fonction périodique de la variable complexe $z = x + yi$. Supposons que cette fonction soit holomorphe dans la bande du plan z comprise entre les deux droites $y = \pm b$, parallèles à l'axe réel. Son développement en série de Fourier est de la forme

$$f(z) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^\infty A_k, \qquad A_k = a_k \cos kz + b_k \sin kz.$$

Faisons la substitution

$$e^{zi} = t. \tag{1}$$

Cette substitution transforme $f(z)$ dans une fonction $\varphi(t)$ qui est uniforme, à cause de la périodicité.

Quand z varie de 2π sur l'axe réel, t décrit le cercle de centre origine et de rayon 1. Quand z varie de 2π sur les droites $y = \pm b$, t décrit les cercles de rayons e^{-b} et e^{b}. La substitution (1) fait donc correspondre à la bande du plan z comprise entre les deux droites $y = \pm b$, la couronne circulaire du plan t comprise entre les deux cercles de rayons e^{-b} et e^{b}; et $\varphi(t)$ est holomorphe dans cette bande.

Par la substitution (1), le terme général du développement de Fourier devient

$$A_k = a'_k t^k + b'_k \frac{1}{t^k}, \tag{2}$$

où

$$a'_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad b'_k = \frac{a_k - b_k}{2i}.$$

Donc le développement de Fourier de $f(z)$ se transforme dans celui de $\varphi(t)$ suivant les puissances positives et négatives de t, c'est-à-dire en série de Laurent, convergente dans la couronne circulaire considérée. Par conséquent, la série de Fourier de $f(z)$ sera aussi convergente dans la bande correspondante. Nous allons déterminer l'ordre de grandeur des coefficients et le degré de convergence de la série.

81. Théorème I. — *Si $f(z)$ de période 2π est holomorphe et que son module soit $\leqq M$ dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$, alors, pour z réel, le module du terme général de la série de Fourier vérifie la condition*

$$|A_k| \leqq 2Me^{-kb}.$$

Considérons le terme général (2) du développement de $\varphi(t)$ en série de Laurent dans la couronne. Soient C_1 le cercle de rayon e^{-b} et C_2 le cercle de rayon e^b qui limitent la couronne. On a

$$a'_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\varphi(t)}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad b'_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \varphi(t)t^k\frac{dt}{t};$$

par conséquent,

$$|a'_k| \leqq e^{-kb}\frac{M}{2\pi}\int_{C_2}\left|\frac{dt}{t}\right| = Me^{-kb},$$

$$|b'_k| \leqq e^{-kb}\frac{M}{2\pi}\int_{C_1}\left|\frac{dt}{t}\right| = Me^{-kb};$$

et, z étant réel, $|A_k|$ ne surpasse pas la somme de ces deux bornes.

82. Théorème II. — *Si $f(z)$ est holomorphe et de module $\leqq M$ dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$, la somme S_n de Fourier donne, sur l'axe réel, une approximation*

$$\varepsilon_n \leqq \frac{2M}{e^b - 1}e^{-nb}.$$

On a, en effet,

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} A_k\right| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} 2Me^{-kb} = 2M\frac{e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}} = 2M\frac{e^{-nb}}{e^b-1}.$$

83. Singularités polaires. Décomposition de la partie principale

en éléments simples. — Nous allons maintenant étudier comment se comporte la série de Fourier lorsque $f(z)$ admet des singularités polaires sur les droites $y = \pm b$. Nous devons d'abord mettre sous la forme la plus convenable la partie principale de la fonction au voisinage d'un pôle d'ordre r.

La fonction $f(z)$ est supposée réelle avec z; par conséquent, les pôles sont conjugués deux à deux et, si $z = a + bi$ est un pôle, $z = a - bi$ en est un autre du même ordre. Déterminons la forme de la partie principale de $f(z)$ au voisinage de deux pôles conjugués $a \pm bi$. En changeant au besoin z en $z + a$, ces pôles deviennent $\pm bi$. Considérons les deux fonctions

$$f(z) - f(-z), \qquad \frac{f(z) - f(-z)}{\sin z}.$$

Ce sont des fonctions paires de période 2π, donc des fonctions uniformes de $\cos z$. Supposons qu'elles admettent les points $\pm bi$ comme pôles de degré r; nous aurons

$$\frac{f(z) + f(-z)}{2} = \frac{A_0}{(\cos z - \cos bi)^r} + \ldots + \frac{A_r}{\cos z - \cos bi} + \psi(z),$$

$$\frac{f(z) - f(-z)}{2 \sin z} = \frac{B_0}{(\cos z - \cos bi)^r} + \ldots + \frac{B_r}{\cos z - \cos bi} + \chi(z),$$

les fonctions ψ et χ étant holomorphes au voisinage des points $\pm bi$. Multiplions la seconde équation par $\sin z$ et ajoutons; nous obtenons la partie principale de $f(z)$, décomposée en une somme de termes que l'on peut considérer comme des *éléments simples* :

$$\frac{A_0 - B_0 \sin z}{(\cos z - \cos bi)^r} + \frac{A_1 - B_1 \sin z}{(\cos z - \cos bi)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_r - B_r \sin z}{\cos z - \cos bi}.$$

Si le pôle est d'ordre r, un au moins des coefficients A_0, B_0 n'est pas nul. Si les pôles conjugués sont $z = a \pm bi$, on changera z en $z - a$ dans les formules précédentes.

84. **Développement des éléments simples en série de Fourier.** — Le développement en série de Fourier de la partie principale de $f(z)$ dans le domaine d'un pôle ne présente aucune difficulté. On l'obtient, comme il suit, presque sans calculs, si le pôle est

simple. Soit b un nombre réel positif; on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{k(zi-b)} = \frac{1}{1-e^{zi-b}} = \frac{1-e^{-zi-b}}{(1-e^{zi-b})(1-e^{-zi-b})}$$
$$= \frac{e^{b}-e^{-zi}}{e^{b}+e^{-b}-2\cos z} = \frac{\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b - \cos z + i\sin z}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)}.$$

On tire de là

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{k(zi-b)} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sh} b + i\sin z}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)}$$

et, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\frac{\operatorname{sh} b}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb}\cos kz,$$
$$\frac{\sin z}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb}\sin kz.$$

On tire immédiatement de la combinaison de ces deux équations le développement en série de Fourier de l'élément simple du premier ordre :

$$\frac{A - B\sin z}{\cos z - \operatorname{ch} b}.$$

Le développement de l'élément simple d'ordre plus élevé est un peu plus compliqué, mais le calcul se fait par de simples dérivations et ne donne lieu à aucune difficulté. Posons, pour simplifier,

$$\operatorname{ch} b = m, \qquad \frac{db}{dm} = \frac{1}{\operatorname{sh} b};$$

nous aurons, en dérivant $r-1$ fois par rapport à m,

$$\frac{1}{(m-\cos z)^r} = \frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dm^{r-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kb}}{\operatorname{sh} b}\cos kz,$$
$$\frac{\sin z}{(m-\cos z)^r} = \frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dm^{r-1}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb}\sin kz.$$

Il est actuellement inutile d'effectuer ces dérivations. Il est plus intéressant de déterminer la valeur principale des coefficients de Fourier pour $k=\infty$. Or cette valeur est manifestement celle qu'on

obtient en dérivant $m-1$ fois de suite l'exponentielle e^{-kb}. On trouve ainsi que les coefficients de $\cos kz$ et de $\sin kz$ ont respectivement pour valeur asymptotique, pour $k=\infty$,

$$\frac{2k^{r-1}e^{-kb}}{(r-1)!\,(\operatorname{sh} b)^r},\quad \frac{2k^{r-1}e^{-kb}}{(r-1)!\,(\operatorname{sh} b)^{r-1}}.$$

Si l'on considère le terme d'ordre k dans le développement de

$$\frac{A+B\sin x}{(\operatorname{ch} b-\cos x)^r},$$

on voit que le maximum de son module pour x réel a pour valeur asymptotique

$$\frac{2\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(r-1)!\,(\operatorname{sh} b)^r}\,k^{r-1}e^{-kb}.$$

Ces diverses expressions sont de l'ordre de $k^{r-1}e^{-kb}$. Cette conclusion subsiste, quelle que soit la position du pôle sur les droites $y=\pm b$, car on passe du cas particulier traité ci-dessus au cas général par le changement de z en $z-a$.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant :

85. **Théorème III.** — *Si $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites $y=\pm b$ et n'a, sur ces droites, que des pôles comme points critiques, ceux-ci d'ordre r au plus, alors, pour $z=x$, la somme S_n de Fourier donne une approximation*

$$\rho_n \overset{=}{<} hn^{r-1}e^{-nb},$$

où h est une constante par rapport à n.

En effet, nous pouvons mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=P+\varphi(z),$$

où P est la somme des parties principales relatives aux divers pôles supposés ci-dessus, et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans une bande débordant la précédente, comprise par exemple entre les droites $y=\pm(b+\varepsilon)$. Le terme général A_k de la série de Fourier de f est la somme des termes du même ordre dans les développements des diverses parties principales qui composent P et dans celui de $\varphi(z)$. En vertu du théorème I, le terme

relatif à φ est de l'ordre de $e^{-k(b+\varepsilon)}$, et les termes relatifs aux parties principales, de l'ordre de $k^{r-1}e^{-kb}$ au plus. Donc leur somme A_k n'est pas d'un ordre supérieur à cette dernière expression. On peut donc assigner une constante h telle qu'on ait, quel que soit k,

$$|A_k| < hk^{r-1}e^{-kb}.$$

Il vient alors

$$|S_n| \leq h\sum_{n+1}^{\infty} k^{r-1}e^{-kb}.$$

Dans cette somme, on passe du terme écrit au suivant en le multipliant par l'expression

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{r-1}e^{-b} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{r-1}e^{-b} = \lambda,$$

et nous pouvons supposer n assez grand pour que λ soit < 1. Il vient alors

$$|S_n| < hn^{r-1}e^{-nb}\sum_{0}^{\infty}\lambda^k$$
$$< \frac{h}{1-\lambda}\, n^{r-1}e^{-nb},$$

ce qui, sauf la manière d'écrire la constante, est le théorème énoncé.

Ce théorème montre la dépendance qu'il y a entre l'ordre de grandeur de l'approximation de $f(x)$ par les sommes de Fourier et l'ordre de grandeur de $f(z)$ quand z tend vers les droites $y = \pm b$. Nous allons démontrer maintenant un théorème qui établira la relation réciproque, mais qui s'applique à toute représentation trigonométrique et pas seulement à celle de Fourier.

86. **Théorème IV.** — *Soit $f(x)$ une fonction de période 2π; supposons qu'elle admette une expression trigonométrique approchée d'ordre n, T_n, telle que l'approximation sur l'axe réel vérifie, quel que soit n, la condition*

$$\varepsilon_n < \varphi(n)e^{-nb},$$

où $\varphi(n)$ est une fonction non décroissante de n, mais qui finit par rester inférieure à $e^{\varepsilon n}$, quelque petit que soit ε, quand n

augmente indéfiniment; alors $f(z)$ est une fonction holomorphe de $z = x + yi$ dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$ (frontière exclue) et l'on a, en supposant y positif,

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_1^\infty \varphi(t) e^{-(b-y)t}\, dt.$$

Dans notre hypothèse, la différence $T_n - T_{n-1} = \rho_{n-1} - \rho_n$ est une expression trigonométrique d'ordre n, dont le module reste (sur l'axe réel) inférieur à

$$2\varphi(n) e^{-(n-1)b}.$$

Nous avons donc sur l'axe réel, par le théorème général sur le module des dérivées (n° 30),

$$|T_{n-1}^k - T_n^k| < 2e^b \varphi(n) n^k e^{-nb}.$$

Considérons le développement, pour x réel,

$$f(x) = T_0 + (T_1 - T_0) + \ldots + (T_n - T_{n-1}) + \ldots.$$

Cette série est indéfiniment dérivable sur l'axe réel, car, pour un ordre k quelconque, nous formons la série majorante

$$|f^{(k)}(x)| < 2e^b[\varphi(1)e^{-b} + \varphi(2)e^{-2b}2^k + \ldots + \varphi(n)e^{-nb}n^k + \ldots].$$

Or cette série a une valeur finie, comme nous allons le montrer en la majorant elle-même par une intégrale. Nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(n) n^k e^{-nb} &< \int_0^1 \varphi(n+t)(n+t)^k e^{-(n-1+t)b}\, dt \\ &< e^b \int_n^{n+1} \varphi(t) t^k e^{-bt}\, dt\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$|f^{(k)}(x)| < 2e^{2b} \int_1^\infty \varphi(t) t^k e^{-bt}\, dt.$$

Cette borne va nous permettre de définir $f(z)$ dans la bande par son développement de Taylor. Posons

$$z = x + u, \qquad |u| = \mu;$$

il vient

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

Je dis que cette série converge dans la bande, donc si μ est $< b$, car on a, par la majorante précédente,

$$|f(z)| < 2e^{2b} \int_1^\infty e^{-bt}\varphi(t)\,dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

$$< 2e^{2b} \int_1^\infty \varphi(t)\,e^{-(b-\mu)t}\,dt.$$

Or cette intégrale existe pour $\mu < b$, car $\varphi(t)$ est d'ordre inférieur à $e^{\mu t}$ par hypothèse. Si l'on fait $u = yi$, d'où $\mu = y$, on obtient la formule du théorème.

Remarque. — On peut aussi supposer la fonction $\varphi(n)$ non croissante. Dans ce cas, la majoration se fait en écrivant $\varphi(n-1)$ au lieu de $\varphi(n)$, donc $\varphi(t-1)$ au lieu de $\varphi(t)$. Il en résulterait *a fortiori*

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_0^\infty \varphi(t)\,e^{-(b-y)t}\,dt.$$

87. Théorème V. — *Si, quel que soit n, $f(x)$ peut être représenté sur l'axe réel par une expression trigonométrique d'ordre n, avec une approximation*

$$\varepsilon_n < \psi(n)\,n^{r-1}e^{-nb},$$

où r est un entier > 0 et $\psi(n)$ une fonction qui tend vers zéro pour $n = \infty$, alors $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$. Si, de plus, $f(z)$ n'a, sur ces droites, d'autres points critiques que des pôles, ceux-ci sont d'ordre $< r$.

Nous avons, dans ce cas-ci,

$$\varphi(n) = n^{r-1}\psi(n)$$

et nous pouvons toujours admettre que cette fonction soit croissante si r est > 1, ou décroissante si r est < 1. Appliquons donc le théorème précédent ou la remarque finale ; il vient, en tous cas,

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_0^\infty \psi(t)\,t^{r-1}e^{-(b-y)t}\,dt.$$

Quand y tend vers b, cette expression est infiniment petite par

rapport à

$$\int_0^\infty t^{r-1} e^{-(b-y)t}\, dt = \frac{\Gamma(r)}{(b-y)^r}$$

et, par conséquent, $f(z)$ ne peut pas avoir de pôle d'ordre r sur la droite $y = b$.

Comparons le théorème précédent au théorème III, nous obtenons l'énoncé suivant :

88. **Théorème VI.** — *Si la fonction $f(z)$, de période 2π, est holomorphe entre les droites $y = \pm b$ et n'a sur ces droites que des pôles comme points critiques; si, de plus, l'ordre maximum de ces pôles est r, alors $f(x)$ admet une représentation d'ordre n quelconque fournissant, sur l'axe réel, une approximation qui, pour $n = \infty$, est d'ordre égal ou inférieur à*

$$n^{r-1} e^{-nb},$$

mais cet ordre ne peut être inférieur, n restant arbitraire.

On conclut de ce théorème que, pour les fonctions considérées, *l'approximation obtenue par les sommes de Fourier est de l'ordre de la meilleure approximation.*

Il suit des théorèmes précédents que l'ordre de la meilleure approximation pour $n = \infty$ suffit, dans certains cas, pour déceler l'existence d'un point critique essentiel. Par exemple, si $f(z)$ est holomorphe entre les droites $y = \pm b$ et si sa meilleure approximation est d'ordre inférieur à $e^{-(b+\varepsilon)n}$ quel que soit ε, sans l'être jamais définitivement à $n^r e^{-nb}$ quel que soit r, on peut affirmer que $f(z)$, supposée uniforme, admet un point critique essentiel sur les droites $y = \pm b$.

89. **Approximation minimum d'un élément polaire simple du premier ordre.** — L'élément simple du premier ordre relatif au pôle $z = \pm bi$ est le suivant :

$$\frac{A + B \sin x}{\cos bi - \cos x}.$$

C'est un fait très intéressant qu'il soit possible d'en obtenir, pour chaque ordre n, l'expression trigonométrique d'approximation minimum. Nous allons former cette expression.

Supposons b positif et posons

$$(1)\qquad T(x) = -2e^{nix}\sin^2\frac{x-bi}{2};$$

$T(x)$ est une expression trigonométrique entière d'ordre $n+1$.

Soient, pour x réel, μ et φ le module et l'argument de

$$-2\sin^2\frac{x-bi}{2};$$

nous avons

$$-2\sin^2\frac{x-bi}{2} = \cos(x-bi)-1 = (\cos x\cos bi - 1) - i\sin x\frac{\sin bi}{i};$$

par conséquent, le carré du module a pour valeur

$$\begin{aligned}\mu^2 &= (\cos x\,\mathrm{ch}\,b - 1)^2 + \sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 b\\ &= \cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 b - 2\cos x\,\mathrm{ch}\,b + 1 + \sin^2 x(\mathrm{ch}^2 b - 1)\\ &= (\mathrm{ch}\,b - \cos x)^2\end{aligned}$$

et l'argument φ est déterminé par les équations

$$\cos\varphi = \frac{\cos x\,\mathrm{ch}\,b - 1}{\mathrm{ch}\,b - \cos x},\qquad \sin\varphi = \frac{\sin x\,\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{ch}\,b - \cos x}.$$

Ces dernières formules mettent en évidence que φ varie de 0 à 2π quand x varie de 0 à 2π et que φ est une fonction impaire de x.

Il vient ainsi

$$T(x) = (\mathrm{ch}\,b - \cos x)e^{n(x+\varphi)i}.$$

On en tire

$$\frac{T(x)}{\mathrm{ch}\,b - \cos x} = \cos(nx+\varphi) + i\sin(nx+\varphi).$$

La partie réelle est paire et la partie imaginaire impaire. Nous pouvons donc poser, P_1 et P_2 désignant respectivement des polynomes de degrés $n+1$ et n,

$$T(x) = P_1(\cos x) + i\sin x\,P_2(\cos x).$$

Séparant alors les parties réelles et imaginaires dans l'équation précédente, on trouve

$$(2)\qquad \begin{cases}\dfrac{P_1(\cos x)}{\mathrm{ch}\,b - \cos x} = \cos(nx+\varphi),\\[2ex] \dfrac{\sin x\,P_2(\cos x)}{\mathrm{ch}\,b - \cos x} = \sin(nx+\varphi).\end{cases}$$

Posons encore

$$R_1(\cos x) = \frac{P_1(\operatorname{ch} b) - P_1(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

$$R_2(\cos x) = \frac{P_2(\operatorname{ch} b) - P_2(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

R_1 et R_2 sont respectivement des polynomes de degré n et $n-1$ et les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{P_1(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_1 = \cos(nx + \varphi), \\[2ex] \dfrac{\sin x\, P_2(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x} - \sin x\, R_2 = \sin(nx + \varphi). \end{cases}$$

Quand x varie de 0 à 2π, $nx + \varphi$ varie de 0 à $2(n+1)\pi$ et les seconds membres atteignent $2n+2$ fois leur maximum absolu 1 avec alternance de signes. Donc (n° 70, 4°) les expressions trigonométriques entières d'ordre n, R_1 et $\sin x\, R_2$, sont d'approximation minimum pour les fonctions respectives

$$\frac{P_1(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \quad \frac{\sin x\, P_2(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

et l'approximation minimum est 1.

Calculons maintenant les valeurs de $P_1(\operatorname{ch} b)$ et de $P_2(\operatorname{ch} b)$. Nous avons

$$P_1(\cos x) = \frac{T(x) + T(-x)}{2},$$

$$P_2(\cos x) = \frac{T(x) - T(-x)}{2i \sin x}.$$

Faisons $x = bi$ et remarquons que l'on a, par (1),

$$T(bi) = 0, \qquad T(-bi) = -2e^{nb}\sin^2 bi = 2e^{nb}\operatorname{sh}^2 b;$$

il vient

$$P_1(\cos bi) = \frac{T(-bi)}{2} = e^{nb}\operatorname{sh}^2 b,$$

$$P_2(\cos bi) = -\frac{T(-bi)}{2i \sin bi} = \frac{T(-bi)}{2\operatorname{sh} b} = e^{nb}\operatorname{sh} b.$$

Donc, en divisant respectivement les équations (3) par ces deux quantités, celles-ci prennent la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_1 \dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b} = \cos(nx + \varphi)\, \dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \\[2ex] \dfrac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_2 \sin x\, \dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b} = \sin(nx + \varphi)\, \dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b}. \end{cases}$$

Ces formules mettent en évidence le théorème suivant :

Les deux éléments simples

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \quad \frac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x}$$

admettent respectivement, comme expressions trigonométriques d'approximation minimum d'ordre n, les deux fonctions

$$R_1 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \quad \sin x R_2 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b},$$

et les approximations minimum correspondantes sont :

$$\frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \quad \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b}.$$

Multiplions maintenant les équations (4) respectivement par les constantes A et B et ajoutons. Posons

$$S = \left(\frac{AR_1}{\operatorname{sh}^2 b} + \frac{BR_2}{\operatorname{sh} b} \sin x\right) e^{-nb};$$

l'expression S est d'ordre n et il vient

$$\frac{A + B \sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - S = \left[\frac{A \cos(nx + \varphi)}{\operatorname{sh}^2 b} + \frac{B \sin(nx + \varphi)}{\operatorname{sh} b}\right] e^{-nb}.$$

Posons encore

$$A = \cos\alpha \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b},$$
$$B \operatorname{sh} b = \sin\alpha \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b};$$

la dernière équation devient

$$(5) \qquad \frac{A + B \sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - S = \cos(nx + \varphi - \alpha) \frac{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{\operatorname{sh}^2 b} e^{-nb}.$$

On en conclut le théorème suivant :

La meilleure approximation de l'élément polaire simple du premier ordre

$$\frac{A + B \sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x}$$

par une expression trigonométrique d'ordre n est

$$\sqrt{\frac{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}{\operatorname{sh}^2 b}}\, e^{-nb}.$$

90. Valeur asymptotique de la meilleure approximation d'un élément simple d'ordre quelconque. — Posons

$$\operatorname{ch} b = m, \qquad \frac{db}{dm} = \frac{1}{\operatorname{sh} b}.$$

Dérivons $r-1$ fois l'équation (5) par rapport à m. Comme φ et α sont des fonctions analytiques de m et ne dépendent pas de n, la valeur asymptotique du second membre pour n infini se réduit au terme qui provient des dérivations successives de l'exponentielle e^{-nb}, parce que chacune de ces dérivations introduit le facteur n. Ce terme sera

$$(-1)^{r-1}\cos(nx+\varphi-\alpha)\,\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^{r+1}}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

Il admet donc $2n+2$ extrémés égaux et de signes alternés dans la période.

La dérivation de l'élément simple au premier membre de (5) donne comme résultat

$$(-1)^{r-1}(r-1)!\,\frac{A+B\sin x}{(m-\cos x)^r}.$$

En vertu de la règle du n° 71, la meilleure approximation d'ordre (infini) n de cette expression est enfermée entre deux bornes, asymptotiquement égales à la valeur absolue commune des extrémés mentionnés ci-dessus. De là, le théorème suivant :

L'approximation minimum de l'élément simple d'ordre r,

$$\frac{A+B\sin x}{(\operatorname{ch} b-\cos x)^r},$$

par une expression trigonométrique d'ordre $\overline{\overline{<}}\, n$, a pour valeur asymtotique (pour $n=\infty$)

$$\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^{r+1}}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

Il est intéressant de comparer cette approximation avec celle que donne la série de Fourier. D'après nos calculs antérieurs (n° 84), le terme d'ordre n du développement de Fourier de l'élément simple d'ordre r ci-dessus a pour valeur asymptotique

$$2\,\frac{A\cos nx+B\operatorname{sh} b\sin nx}{(r-1)!\,(\operatorname{sh} b)^r}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

La valeur asymptotique de l'approximation correspondante sera donc

$$\frac{2\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(r-1)!\,(\operatorname{sh} b)^r}\sum_{n+1}^{\infty} k^{r-1}e^{-kb},$$

ce qui, asymptotiquement, revient à

$$\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^r\,\frac{1}{2}(e^b-1)}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

La meilleure approximation est donc à celle de Fourier dans le rapport

$$\frac{e^b-1}{2\operatorname{sh} b}=\frac{1}{1+e^{-b}}.$$

Ce rapport tend vers l'unité quand b tend vers l'infini.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour les éléments simples peuvent s'étendre à la fonction $f(z)$ elle-même dans des cas assez généraux. La valeur asymptotique de la meilleure approximation de $f(x)$ sera connue si $f(z)$ n'a qu'un seul couple de pôles conjugués sur les droites $y=\pm b$, ou s'il existe sur ces droites un couple de pôles conjugués d'ordre plus élevé que les autres.

91. Application à la représentation par polynomes. — Les résultats précédents s'étendent, par la transformation $x=\cos\varphi$, à la représentation d'une fonction $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques et à sa meilleure représentation par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Si φ décrit les droites $y=\pm b$, la variable x décrit une ellipse de foyers ± 1 et dont la somme des demi-axes est $R=e^b$. Nous l'appellerons, en abrégé, l'*ellipse* (R). A la bande du plan φ comprise entre les droites correspond, dans le plan x, l'aire intérieure à l'ellipse (R).

Il suffira donc d'énoncer quelques-uns des théorèmes transformés. Le théorème II (n° 82) se transforme dans le suivant :

Si $f(x)$ est holomorphe et de module $\leqq M$ dans l'ellipse (R), *la somme S_n de la série de polynomes trigonométriques donne,*

sur l'axe réel, une approximation

$$\rho_n = \frac{2M}{R^n(R-1)}.$$

Voici maintenant le théorème transformé de IV (n° 86) :

Si, quel que soit n, $f(x)$ peut être représenté dans l'intervalle $(-1, -1)$ par un polynome de degré $\leq n$, avec une approximation

$$\rho_n < \frac{\varphi(n)}{R^n} \qquad (R > 1),$$

où $\varphi(n)$ est une fonction monotone de n, qui devient inférieure à $e^{\varepsilon n}$ quelque petit que soit ε quand n tend vers l'infini, alors $f(z)$ est holomorphe dans l'ellipse (R) (¹). *De plus, si $r < R$, on a dans l'ellipse (r)*

$$|f(z)| < 2R^2 \int_0^\infty \varphi(t)\left(\frac{r}{R}\right)^t dt.$$

Voici le théorème transformé de VI (n° 88) :

Si $f(z)$ n'a pas d'autres points critiques que des pôles sur l'ellipse (R) *et que l'ordre maximum de ces pôles soit r, sa meilleure approximation d'ordre n infiniment grand sera infiniment petite d'ordre égal ou inférieur à $n^{r-1} : R^n$, mais cet ordre ne pourra pas être moindre si n reste arbitraire.*

Passons maintenant aux singularités polaires.

Considérons la fonction

$$\frac{1}{x-a},$$

où a est un nombre réel de module > 1. On peut toujours supposer a positif, car, si a était négatif, on changerait le signe de x et celui de la fonction. Posons

$$x = \cos\varphi, \qquad a = \operatorname{ch} b;$$

nous sommes ramenés à la fonction

$$\frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{ch} b}, \qquad b = \log(a + \sqrt{a^2-1}).$$

(¹) Cette partie du théorème est due à M. Bernstein. *Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 24).

Or nous connaissons la meilleure approximation trigonométrique de cette fonction (n° 89). De là, le théorème suivant [1] :

On connaît la meilleure approximation de

$$\frac{1}{x-a} \quad (a > 1)$$

par un polynome de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ *et cette meilleure approximation est*

$$\rho_n = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

Si nous considérons maintenant l'expression simple

$$\frac{1}{(x-a)^r},$$

qui admet un pôle d'ordre r entier, nous pouvons encore déterminer la valeur asymptotique de sa meilleure approximation d'ordre n infiniment grand dans l'intervalle $(-1, +1)$. Cette valeur est

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{n^{r-1}}{(a^2-1)^{\frac{r+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

Si, au lieu d'un pôle réel, nous considérions un couple de pôles conjugués dans le plan x, la substitution $x = \cos\varphi$ introduirait, comme on s'en aperçoit facilement, deux couples de pôles conjugués distincts sur les droites $y = \pm b$ du plan φ. Nous ne sommes plus en état de déterminer la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'ordre infiniment grand n. Cette approximation est un infiniment petit dont l'ordre seul nous sera connu.

Plus généralement, si une fonction n'admet pas d'autres points critiques que des pôles, sa meilleure approximation, dans l'intervalle $(-1, +1)$, par un polynome d'ordre infiniment grand n, est

---

[1] S. Bernstein. *Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données* [*Bull. Acad. R. de Belgique* (Classe des Sciences, n° 2, 1913)]. M. Bernstein n'a considéré que l'approximation par polynomes. Nous venons de montrer que l'on arrive à des résultats plus complets dans l'approximation trigonométrique.

un infiniment petit dont l'ordre est connu. On suppose toutefois que les pôles sont extérieurs au segment considéré $(-1, +1)$.

92. **Remarque générale.** — Les pôles sont des cas particuliers de points critiques plus généraux, que nous appellerons *points critiques d'ordre s* (s fractionnaire) et que nous étudierons dans le Chapitre suivant. Nous allons utiliser dans cette étude des procédés entièrement différents des précédents, mais qui s'appliquent au cas des singularités polaires. Nous serons ainsi conduits à des théorèmes plus généraux qui contiennent les précédents comme cas particuliers (s entier).

CHAPITRE IX.

FONCTIONS ANALYTIQUES PRÉSENTANT CERTAINES SINGULARITÉS NON POLAIRES (POINTS CRITIQUES D'ORDRE s).

93. **Détermination préliminaire de la valeur asymptotique d'une certaine intégrale complexe.** — Considérons, dans le plan de la variable $z = x + yi$, un segment vertical PQ ayant pour extrémités les deux points

$$P(\alpha + bi), \qquad Q[\alpha + (b + \varepsilon)i],$$

où b et ε sont positifs. Ce segment est de longueur ε. Désignons par L un lacet, parcouru dans le sens direct, formé des deux bords du segment PQ et d'un cercle infiniment petit décrit autour du point P. Formons l'intégrale sur ce lacet :

$$(1) \qquad I_k = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(z) e^{kzi} dz}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s},$$

où $\varphi(z)$ est une fonction qui est régulière dans le cercle de centre P et de rayon PQ (ou ε) et qui ne s'annule pas au point P. Nous supposons que k et s sont des constantes et que s n'est pas un entier négatif ou nul, de sorte que P est un point singulier de la fonction à intégrer. Nous nous proposons maintenant de déterminer la valeur asymptotique de l'intégrale I_k, quand k est un entier positif qui augmente indéfiniment.

Faisons le changement de variables

$$z = \alpha + bi + t.$$

Cette substitution fait correspondre aux points P et Q les points $P'(t = 0)$ et $Q'(t = \varepsilon i)$ et transforme le lacet L dans un lacet égal L' qui contourne le segment P'Q' de l'axe imaginaire. Ce lacet se déduit du précédent par une simple translation. L'in-

tégrale transformée sera

$$I_k = \frac{e^{-kb+k\alpha i}}{\pi} \int_{L'} \frac{\varphi(\alpha + bi - t)e^{kti}\,dt}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s}.$$

Par hypothèse, sur L', on a le développement convergent, procédant suivant les puissances de t :

$$(2) \qquad \frac{\varphi(\alpha + bi - t)}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi - t)]^s} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots}{t^s};$$

donc, q désignant un entier positif et μ une fonction de t bornée sur L', on a

$$\frac{\varphi(\alpha - bi + t)}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi - t)]^s} = \sum_{\lambda=0}^{q-1} a_\lambda t^{\lambda-s} + \mu t^{q-s},$$

d'où

$$(3) \qquad I_k = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \frac{a_\lambda}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kti}\,dt$$
$$- \frac{1}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} \mu t^{q-s} e^{kti}\,dt.$$

Prenons pour q le premier entier positif $> s$. Alors, dans la dernière intégrale, $q - s$ est positif, t^{q-s} s'annule sur le cercle infiniment petit de centre P' ($t = 0$) et l'intégrale sur L' se réduit à celles sur les deux bords du segment P'Q' (où $t = ri$, r variant de 0 à ε). Soit M le module maximum de μ; on voit, en remplaçant la quantité à intégrer par son module, que le dernier terme de la formule précédente est de module inférieur à

$$\frac{2M}{\pi} e^{-kb} \int_0^\varepsilon t^{q-s} e^{-kt}\,dt < \frac{2M}{\pi} \frac{\Gamma(1 + q - s)}{k^{1-q-s}} e^{-kb}.$$

Nous allons constater que cette borne est infiniment petite par rapport à la valeur asymptotique des autres termes de la mêmer formule (3). Considérons donc l'un d'eux

$$\frac{a_\lambda}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kti}\,dt.$$

Supposons provisoirement $\lambda - s > -1$, auquel cas l'intégrale est encore nulle sur le cercle infiniment petit de centre P' et se

réduit à celles sur les deux bords du segment P'Q'. Posons

$$t = re^{\varphi i};$$

l'argument φ de t est $-\frac{3\pi}{2}$ à gauche et $-\frac{\pi}{2}$ à droite du segment P'Q'. D'ailleurs, sur les deux bords, on a $t = ir$, $dt = i\,dr$ et r varie entre o et ε. Il vient ainsi

$$\begin{aligned}\int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kt} dt &= ie^{\frac{3\pi i}{2}(\lambda-s)} \int_{\varepsilon}^{0} r^{\lambda-s} e^{-kr} dr \\ &\quad + ie^{\frac{\pi i}{2}(\lambda-s)} \int_{0}^{\varepsilon} r^{\lambda-s} e^{-kr} dr \\ &= 2e^{-\frac{\pi i}{2}(\lambda-s)} \sin(\lambda-s)\pi \int_{0}^{\varepsilon} r^{\lambda-s} e^{-kr} dr.\end{aligned}$$

Afin de faire disparaître la restriction imposée à $\lambda - s$, mettons cette relation sous la forme suivante :

$$(4)\quad \int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kt} dt = 2e^{\frac{\pi i}{2}(s-\lambda)} \sin(\lambda-s)\pi \left[\frac{\Gamma(\lambda+1-s)}{k^{\lambda+1-s}} - \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{\lambda-s} e^{-kr} dr \right].$$

Sous cette nouvelle forme, la relation subsiste pour toutes les valeurs de $\lambda - s$ et, en particulier, pour les valeurs réelles négatives, car les deux membres sont des fonctions analytiques uniformes de $\lambda - s$. Si k tend vers l'infini, le dernier terme est négligeable en présence du précédent. C'est donc celui-ci qui fournit la valeur asymptotique, et l'on a, par les propriétés classiques des fonctions Γ,

$$\int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kt} dt \sim 2\pi e^{\frac{\pi i}{2}(s-\lambda)} \frac{k^{s-1-\lambda}}{\Gamma(s-\lambda)},$$

le signe $\sim$ désignant l'égalité asymptotique.

Donc (a_0 étant $\neq$ o), le terme principal dans la formule (3) est celui où $\lambda = o$. La valeur asymptotique de I_k sera

$$I_k \sim 2a_0 e^{\frac{s\pi i}{2}} \frac{k^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-k(x_0-k)x_0}.$$

La valeur de a_0 se tire de la formule (2). On a

$$a_0 = \varphi(\alpha + bi) \lim_{t=0} \left[\frac{t}{\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)} \right]^s$$
$$= \frac{\varphi(\alpha + bi)}{(\sin bi)^s} = e^{-\frac{s\pi i}{2}} \frac{\varphi(\alpha + bi)}{(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Par la substitution de cette valeur, on trouve la relation asymptotique cherchée

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(z) e^{kzi}\, dz}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s} \sim 2\varphi(\alpha - bi) \frac{k^{s-1} e^{-kb + k\alpha i}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Cette formule est en défaut si s est un entier nul ou négatif, et ne l'est que dans ce cas.

94. Dérivation de la formule asymptotique précédente. — La dérivation par rapport à la lettre s des formules (2), (3) et (4) se justifie à simple vue. Donc la formule (5) est aussi dérivable par rapport à s. Cette dérivation conduit à la formule asymptotique suivante, dans laquelle m est un entier positif :

$$(6) \qquad \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\{\log[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]\}^m}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s} \varphi(z) e^{kzi}\, dz$$
$$\sim 2(-1)^m \frac{k^{s-1} (\log k)^m e^{-kb + k\alpha i}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s} \varphi(\alpha + \beta i).$$

Ceci suppose toutefois que s ne soit pas un entier nul ou négatif. Dans ce cas, nous poserons $s = -p$ (p entier positif). Il faut alors, pour obtenir le terme principal, faire porter une fois la dérivation sur le facteur $1 : \Gamma(s)$ qui s'annule pour $s = -p$. On trouve ainsi, comme valeur asymptotique de l'intégrale (6),

$$2(-1)^m m \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \right]' \frac{k^{s-1} (\log k)^{m-1} e^{-kb + k\alpha i}}{(\operatorname{sh} b)^s} \varphi(\alpha + \beta i).$$

D'ailleurs, pour $s = -p$, on a

$$\left[\frac{1}{\Gamma(s)} \right]' = \left[\frac{\sin s\pi}{\pi} \Gamma(1 - s) \right]' = \cos s\pi \Gamma(1 - s) = (-1)^p p!$$

Donc, si $s = -p$ est un entier négatif, et en supposant pour simplifier $\alpha = 0$, la formule (6) doit être remplacée par la sui-

vante :

$$(6)\qquad \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}(\operatorname{ch} b-\cos z)^{p}[\log(\operatorname{ch} b-\cos z)]^{m}\varphi(z)e^{kz}dz$$
$$\sim \pi m(-1)^{m+p}(\operatorname{sh} b)^{p}\frac{(\log k)^{m-1}e^{-kb}}{k^{p+1}}\varphi(bi).$$

95. Points critiques d'ordre s. — Nous allons maintenant étudier des fonctions présentant certains points critiques plus généraux que les pôles et comprenant les pôles comme cas particuliers. Il faut tout d'abord définir ces points critiques.

Soit $f(z)$ une fonction analytique, uniforme dans le voisinage d'un point z_0. Nous dirons que le point z_0 est un *point critique d'ordre* s de $f(z)$, si, dans le voisinage de ce point, $f(z)$ est de la forme

$$f(z)=\frac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^s},$$

où $\varphi_1(z)$ est régulière et non nulle au point z_0, et où s est un nombre réel quelconque autre qu'un entier nul ou négatif. Si s est rationnel, z_0 est un point critique algébrique.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit périodique de période 2π. Il est utile de modifier la représentation précédente de manière à faire apparaître la périodicité. Considérons un couple de points critiques conjugués

$$\alpha+bi;$$

au voisinage de ces points, nous aurons

$$(7)\qquad f(z)=\frac{\varphi(z)}{[\operatorname{ch} b-\cos(z-\alpha)]^{s}},$$

où $\varphi(z)$ est holomorphe avec φ_1, car le quotient

$$\left[\frac{z-\alpha+bi}{\operatorname{ch} b-\cos(z-\alpha)}\right]^{s}$$

est régulier aux points $\alpha\pm bi$.

96. Élément simple d'ordre s. — Considérons un couple de points critiques conjugués d'ordre s, $z=\alpha\pm bi$. On les ramène sur l'axe imaginaire, donc à la forme $\pm bi$, par le changement de z en $z-\alpha$. Ainsi, soit $f(z)$ une fonction périodique admettant

les deux points critiques conjugués $\pm bi$. Au voisinage de ces points, $f(z)$ est de la forme $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)$, à savoir

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}.$$

Les deux fonctions régulières

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(-z)}{2}, \qquad \frac{\varphi(z) - \varphi(-z)}{2\sin z}$$

sont paires de période 2π et sont, par conséquent, des fonctions uniformes de $\cos z$. Elles sont développables par la formule de Taylor suivant les puissances de $\cos z - \cos bi$. Elles sont donc respectivement de la forme

$$A + (\cos bi - \cos z)\psi_1(\cos z), \qquad B + (\cos bi - \cos z)\psi_2(\cos z),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont holomorphes au voisinage des points $z = \pm bi$. On en tire

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= A + B\sin z + (\cos bi - \cos z)(A\psi_1 - B\sin z\,\psi_2)\\ &= A + B\sin z + (\operatorname{ch} b - \cos z)\varphi_2(z),\end{aligned}$$

où φ_2 est régulière aux points $\pm bi$. Il vient ainsi finalement

$$(8) \qquad f(z) = \frac{A + B\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} + \frac{\varphi_2(z)}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^{s-1}}.$$

Nous donnerons au premier terme de cette décomposition, qui est le terme principal, le nom d'*élément simple d'ordre s*. Il est relatif aux deux points $\pm bi$. Dans le cas général, les deux points conjugués sont $\alpha \pm bi$. On revient à ce cas par le changement de z en $z - \alpha$. Donc l'expression de l'*élément simple d'ordre s* pour les deux points conjugués $\alpha \pm bi$ est

$$\frac{A + B\sin(z - \alpha)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s}.$$

La formule (8) nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Au voisinage d'un point critique d'ordre s, $f(z)$ est la somme de l'élément simple d'ordre s et d'une fonction pour laquelle l'ordre du point critique est abaissé.

97. **Valeur asymptotique des coefficients de Fourier.** — Soit

$f(z)$ une fonction périodique, holomorphe entre les deux droites $y = \pm b$. Supposons d'abord qu'elle n'admette, sur ces deux droites, que deux points critiques conjugués non équivalents, $z = \alpha \pm bi$, ceux-ci d'ordre s positif ou négatif. Les coefficients a_k et b_k de Fourier, dont nous nous proposons de trouver les valeurs asymptotiques pour $k = \infty$, sont définis par l'intégrale, effectuée sur l'axe réel,

$$(9) \qquad a_k - ib_k = \frac{1}{\pi} \int_{AB} f(z) e^{kzi} dz,$$

en désignant par AB un segment de cet axe de longueur 2π et de situation quelconque. Nous choisirons un segment AB contenant le point α au sens étroit. Construisons le rectangle ABA'B', qui a pour base le segment AB et dont le côté opposé A'B' se trouve sur la droite $y = b + \varepsilon$. Nous supposons que ε est un nombre positif $< b$ et assez petit pour que le rectangle ABA'B' ne contienne que le seul point critique $\alpha + bi$, que nous désignerons par P. Joignons ce point critique P au côté supérieur A'B' du rectangle par une coupure verticale PQ et désignons par L le lacet qui contourne cette coupure dans le sens direct. La ligne d'intégration AB peut être remplacée par le contour AA'B'B en ayant soin de contourner le point critique P par le lacet L. Les intégrales sur les côtés verticaux AA' et B'B du rectangle se détruisent, à cause de la périodicité. L'intégrale (9) se réduit donc aux intégrales sur A'B' et sur L, c'est-à-dire que l'on a

$$(10) \qquad a_k - ib_k = \frac{1}{\pi} \int_{A'B'} - \frac{1}{\pi} \int_{L} f(z) e^{kzi} dz.$$

Il s'agit de trouver la valeur asymptotique de cette expression pour $k = \infty$. Le terme principal est l'intégrale sur L, car l'intégrale sur A'B' est, $f(z)$ étant borné, de l'ordre de $|e^{kzi}| = e^{-k(b+\varepsilon)}$; donc infiniment petite par rapport à l'intégrale sur L, comme le calcul de celle-ci va nous le montrer. Nous aurons donc asymptotiquement

$$a_k - ib_k \sim \frac{1}{\pi} \int_{L} f(z) e^{kzi} dz.$$

Mais, par hypothèse, $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s}$$

et cette intégrale rentre dans celle dont nous avons déterminé la valeur asymptotique au début du Chapitre. Il vient, par la formule (5),

$$(11)\qquad a_k + ib_k \sim 2\varphi(\alpha + bi)e^{k\alpha i}\frac{k^{s-1}e^{-kb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s},$$

ce qui fournit les valeurs asymptotiques cherchées de a_k et de b_k.

Il y a lieu de remarquer que si l'élément simple principal de $f(z)$ au point $\alpha + bi$ est

$$\frac{A + B\sin(z-\alpha)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z-\alpha)]^s},$$

on a, d'après la formule (8),

$$\varphi(z) = A + B\sin(z-\alpha) + [\operatorname{ch} b - \cos(z-\alpha)]\varphi_2(z);$$

d'où

$$\varphi(\alpha + bi) = A + iB\operatorname{sh} b.$$

Par hypothèse, l'un au moins des deux coefficients A ou B est différent de 0.

En second lieu, supposons que $f(z)$, holomorphe entre les droites $y = \pm b$, admette, sur ces droites, plusieurs couples de points critiques non équivalents et d'ordres déterminés; par exemple, les points

$$\alpha_1 \pm bi, \qquad \alpha_2 \pm bi, \qquad \ldots$$

des ordres $s_1, s_2, \ldots$ respectivement. Si l'un de ces ordres, par exemple s_1, est supérieur à tous les autres, je vais montrer que l'on connaîtra encore la valeur asymptotique de $a_k - ib_k$ et qu'elle conservera la même forme que dans la formule (11).

En effet, la valeur de $a_k + ib_k$ est donnée par l'intégrale (9) sur AB. Celle-ci se ramène, comme ci-dessus, à l'intégrale sur A'B' et sur divers lacets $L_1, L_2, \ldots$ analogues à L et contournant les divers points critiques situés au-dessus de l'axe réel. Ces intégrales se calculent comme ci-dessus, mais c'est l'intégrale sur L_1 qui est prépondérante. La formule (11) subsiste donc, sauf qu'il faut y remplacer α par α_1, φ par φ_1 et s par l'ordre maximum s_1.

Passons maintenant au cas général. Supposons que la fonction périodique $f(z)$, holomorphe entre les deux droites $y = \pm b$,

admette, sur ces droites, λ couples de points critiques de l'ordre maximum s, à savoir

$$\alpha_1 \pm bi, \quad \alpha_2 \pm bi, \quad \ldots, \quad \alpha_\lambda \pm bi.$$

Supposons que l'élément simple principal relatif à $\alpha_\mu + bi$ soit

$$\frac{A_\mu + B_\mu \sin(z - \alpha_\mu)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha_\mu)]^s} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

et posons, en abrégé,

$$A_\mu + iB_\mu \operatorname{sh} b = H_\mu.$$

D'après les raisonnements précédents, la valeur de $a_k + ib_k$ sera, en général, sauf une erreur d'ordre supérieur à $k^{s-1}e^{-kb}$,

$$(12) \qquad a_k + ib_k \sim \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda} H_\mu e^{k\alpha_\mu i} \right) \frac{2k^{s-1}e^{-kb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Mais cette formule ne donne la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$ que si la somme

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda} H_\mu e^{k\alpha_\mu i}$$

n'est ni nulle ni infiniment petite. Dans ces cas d'exception, $a_k + ib_k$ est un infiniment petit d'ordre plus élevé que $k^{s-1}e^{-kb}$ et nous n'en connaissons plus la valeur asymptotique.

98. Ordre de l'approximation fournie par la série de Fourier. — Soit toujours $f(z)$ une fonction périodique, holomorphe entre les droites $y = \pm b$, n'ayant sur ces droites que des points critiques d'ordres déterminés et dont l'ordre maximum est s. Soient S_n la somme de Fourier d'ordre n de $f(z)$ et ϱ_n l'approximation correspondante : on a

$$\varrho_n = \sum_{n+1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Nous avons établi, au numéro précédent, que $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ est un infiniment petit de l'ordre de $k^{s-1}e^{-kb}$ ou d'ordre plus élevé. Il en résulte que l'on peut assigner une constante h telle que l'on ait, quel que soit n,

$$\varrho_n < hn^{s-1}e^{-nb}.$$

Donc : *L'approximation par la série de Fourier est un infiniment petit, qui est au moins de l'ordre de*

$$n^{s-1}e^{-nb},$$

et il en résulte qu'il est exactement de cet ordre, car nous allons prouver que c'est celui de la meilleure approximation.

Soit, en effet, ρ_n la meilleure approximation. Nous avons d'abord $\rho_n \leq \rho'_n$. D'autre part, nous avons, par une formule connue (n° 9, 6°),

$$\rho_n = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)}.$$

Si la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$ est donnée par la formule (11), elle est de l'ordre de $k^{s-1}e^{-kb}$ et l'on peut assigner une constante h_1 telle qu'on ait

$$\rho_n > h_1 n^{s-1} e^{-nb}.$$

Donc ρ_n est du même ordre que ρ'_n. Dans ce cas, la conclusion est immédiate.

Il n'y a de difficulté que quand $f(z)$ admet λ couples de points critiques du même ordre maximum s, car, dans ce cas, la formule (12), qui remplace la formule (11), ne donne pas nécessairement la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$.

On se tire d'affaire en déduisant de la formule (12) une formule asymptotique qui subsiste dans tous les cas.

A cet effet, formons le déterminant d'ordre λ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{\alpha_1 i} & e^{\alpha_2 i} & \dots & e^{\alpha_\lambda i} \\ e^{2\alpha_1 i} & e^{2\alpha_2 i} & \dots & e^{2\alpha_\lambda i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{(\lambda-1)\alpha_1 i} & e^{(\lambda-1)\alpha_2 i} & \dots & e^{(\lambda-1)\alpha_\lambda i} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant n'est pas nul, car il est le produit de toutes les différences non nulles

$$e^{\alpha_2 i} - e^{\alpha_1 i}, \quad e^{\alpha_3 i} - e^{\alpha_1 i}, \quad \dots$$

Nous désignerons les mineurs relatifs à la première colonne par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\lambda-1}$.

Soit ν l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1$. Remplaçons k par $k + \nu$ dans la formule (12) : nous en tirons, avec le même ordre d'approximation,

$$a_{k+\nu} - ib_{k+\nu} \sim \left(\sum_{g=1}^{\lambda} H_g e^{(k+\nu)\alpha_g i} \right) \frac{2k^{s-1} e^{-(k+\nu)b}}{\Gamma(s) \operatorname{sh} b^s}.$$

Multiplions cette relation par $\Delta_\nu e^{\nu b}$ et sommons par rapport à ν : il vient

$$(13) \qquad \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (a_{k+\nu} - ib_{k+\nu}) \Delta_\nu e^{\nu b} \sim \Delta H_1 e^{bk\alpha_1 i} \frac{2k^{s-1} e^{-kb}}{\Gamma(s) \operatorname{sh} b^s}.$$

C'est la formule que nous cherchions. Elle subsiste dans tous les cas comme formule asymptotique, car le coefficient ΔH_1 est différent de zéro par hypothèse. Il résulte immédiatement de cette formule ($\Delta_\nu e^{\nu b}$ étant borné) que l'on peut assigner une constante positive h_2 telle que l'on ait, quel que soit k,

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} |a_{k+\nu} - ib_{k+\nu}| > h_2 k^{s-1} e^{-kb},$$

ou (en remplaçant k par $n - 1$, ν par k et en changeant au besoin la valeur de h_2) telle qu'on ait, quel que soit n,

$$\sum_{n+1}^{n+\lambda} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} > h_2 n^{s-1} e^{-nb}.$$

Revenons maintenant à la meilleure approximation ζ_n. Elle vérifie *a fortiori* la condition

$$\zeta_n > \sqrt{\frac{1}{\lambda} \sum_{n+1}^{n+\lambda} (a_k^2 + b_k^2)}.$$

En prenant $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $q_k = 1$ dans la relation classique

$$(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_\lambda^2)(q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_\lambda^2) \geq (p_1 q_1 + \ldots + p_\lambda q_\lambda)^2,$$

on en conclut encore *a fortiori*, par ce qui précède,

$$\zeta_n > \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n+1}^{n+\lambda} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} > \frac{h_2}{\sqrt{\lambda}} n^{s-1} e^{-nb}.$$

Le théorème est donc démontré. L'approximation obtenue par la somme S_n de Fourier est de l'ordre de la meilleure approximation, et cet ordre est celui de $n^{s-1}e^{-nb}$ exactement.

99. **Valeur asymptotique de l'approximation minimum de l'élément simple d'ordre** s. — Établissons d'abord une formule préliminaire. Soit $P(x)$ un polynome de degré $n+1$ ayant toutes ses racines réelles et situées sur le segment $(-1, +1)$. Soit ensuite $f(x)$ une fonction analytique, régulière sur ce segment. Si l'on désigne par $R(x)$ le polynome de degré n qui se confond avec $f(x)$ aux $n+1$ points du segment qui sont racines de $P(x)$, on a

$$(14) \qquad f(x) - R(x) = \frac{P(x)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)P(z)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C entourant le segment $(-1, +1)$ et ne contenant aucun point singulier de $f(z)$.

En effet, en remplaçant l'intégrale sur C par la somme des résidus de $f(z)$ au point x et aux $n+1$ points racines de $P(z)$, on retrouve $f(x) - P(x)$, où $P(x)$ est exprimé par la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons transformer la formule (14). Remplaçons respectivement x par $\cos z$ et z par $\cos t$. Prenons comme contour C une ellipse de foyers $(-1, +1)$. La variable z décrit cette ellipse, quand t décrit le segment AB parallèle à l'axe réel, d'ordonnée positive et limité aux abscisses $-\pi$ et $+\pi$. L'aire intérieure à C correspond alors à celle du rectangle compris entre AB et l'axe réel, donc $f(\cos t)$ sera supposée régulière dans ce rectangle.

Par ces substitutions, la formule (14) devient (le sens direct étant BA)

$$(15) \qquad f(\cos z) - R(\cos z) = \frac{P(\cos z)}{2\pi i}\int_{AB} \frac{f(\cos t)\sin t\,dt}{(\cos t - \cos z)P(\cos t)}.$$

Nous aurons à faire deux applications de cette formule, en choisissant respectivement pour P deux polynomes que nous avons déjà rencontrés et sur lesquels nous allons tout d'abord revenir.

Nous savons (n° 89) que, si l'on pose

$$T(z) = -2e^{nzi}\sin^2\frac{z-bi}{2},$$

on a

$$T(z) = P_1(\cos z) - i \sin z P_2(\cos z),$$

où P_1 et P_2 sont deux polynomes de degrés n et $n-1$ respectivement, qui ont toutes leurs racines sur le segment $(-1, +1)$. Ce sont ces deux polynomes que nous aurons à introduire dans la formule (15). Avant de faire cette introduction, faisons encore une remarque préalable sur l'ordre de grandeur de ces polynomes pour n infini. Nous supposerons la variable $z = x + yi$ d'ordonnée y positive. Alors on voit immédiatement que $T(z)$ est infiniment petit de l'ordre de e^{-ny} et $T(-z)$ infiniment grand de l'ordre de e^{ny}. Donc les deux polynomes

$$P_1(\cos z) = \frac{T(z) + T(-z)}{2}, \qquad P_2(\cos z) = \frac{T(z) - T(-z)}{2 \sin z}$$

sont infiniment grands de l'ordre de e^{ny}.

Comme première application de la formule (15), nous allons déterminer la valeur asymptotique de l'approximation minimum de l'élément simple pair d'ordre s. A cette fin, nous substituons dans la formule les fonctions

$$f(\cos z) = \frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}, \qquad P = P_1(\cos z),$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z)$$
$$= \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_{AB} \frac{\sin t \, dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s (\cos t - \cos z) P_1(\cos t)}.$$

La fonction $f(\cos t)$ n'a ici que le seul point critique $t = bi$. Enfermons ce point dans un rectangle ABA'B' de base AB et tel que l'ordonnée $b - \varepsilon$ du côté supérieur A'B' soit $+ 2b$. Joignons le point bi, que nous désignerons par P, au côté A'B' par une coupure verticale PQ; désignons par L le lacet qui contourne cette coupure par les deux bords dans le sens direct. La ligne d'intégration AB peut être remplacée par le contour AA'B'B, à condition de contourner le point P par le lacet L. Les intégrales sur les côtés verticaux se détruisent. L'intégrale se réduit donc à celles sur A'B' et sur L.

Nous nous proposons de trouver la valeur asymptotique de l'intégrale pour n infini. L'intégrale sur A'B' est alors infiniment

petite de l'ordre de $e^{-n(b+\varepsilon)}$, car $P_1(\cos t)$ est de l'ordre de $e^{n(b+\varepsilon)}$, tandis que les autres facteurs sous le signe d'intégration sont finis. Cette intégrale est négligeable par rapport à celle sur L. C'est ce que le calcul de celle-ci va démontrer. Nous obtiendrons ainsi la formule asymptotique

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z)$$
$$\sim \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_L \frac{\sin t\, dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s (\cos t - \cos z) P_1(\cos t)}.$$

Calculons donc la valeur asymptotique de cette intégrale. Nous avons

$$P_1(\cos t) = -e^{nti} \sin^2 \frac{t - bi}{2} - e^{-nti} \sin^2 \frac{t + bi}{2}.$$

De là résulte, sur l'axe imaginaire positif (donc sur L), le développement convergent :

$$\frac{1}{P_1(\cos t)} = -\frac{e^{nti}}{\sin^2 \frac{t + bi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[-e^{2nti} \left(\frac{\sin \frac{t - bi}{2}}{\sin \frac{t + bi}{2}} \right)^2 \right]^\lambda.$$

Nous en concluons, en désignant par q un entier positif et par μ une fonction bornée sur L,

$$\frac{1}{P_1(\cos t)} = -\frac{e^{nti}}{\sin^2 \frac{t + bi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left[-e^{2nti} \left(\frac{\sin \frac{t - bi}{2}}{\sin \frac{t + bi}{2}} \right)^2 \right]^\lambda$$
$$+ \mu e^{(2q+1)nti} \left(\sin \frac{t - bi}{2} \right)^{2q}.$$

Donnons à q une valeur positive $> \frac{s}{2}$, substituons ce développement dans la dernière intégrale et désignons par μ_1 une fonction qui est bornée sur L en même temps que le facteur

$$\mu \frac{\left(\sin \frac{t - bi}{2} \right)^{2q}}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s};$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z) \sim -\frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \int_L \frac{e^{(2\lambda+1)nti} \varphi_\lambda(t)\, dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s}$$
$$- \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_L \mu_1 e^{(2q+1)nti}\, dt,$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$\varphi_\lambda(t) = (-1)^\lambda \frac{\sin t}{\cos t - \cos z} \frac{\left(\sin\frac{t-bi}{2}\right)^{2\lambda}}{\left(\sin\frac{t-bi}{2}\right)^{2q+2}}.$$

Comme $\varphi_\lambda(t)$ est holomorphe dans le cercle de centre bi et de rayon ε, chaque terme de la somme Σ est asymptotiquement donné par la formule (5) du n° 93. Le terme complémentaire est de l'ordre de

$$\int_L |e^{2q+1\,nti}\,dt| = 2e^{-2q+1\,bn}\int_0^\varepsilon e^{-2q+1\,vn}\,dv,$$

donc de l'ordre de $e^{-2q+1\,bn}$ et, par conséquent, négligeable. Le terme principal est celui où $\lambda = 0$. Il vient donc, par la formule rappelée,

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z) \sim -\frac{P_1(\cos z)}{i}\,\varphi_0(bi)\,\frac{n^{s-1}e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Substituons encore

$$\varphi_0(bi) = \frac{\sin bi}{(\cos bi - \cos z)\sin^2 bi} = \frac{-i}{(\operatorname{ch} b - \cos z)\operatorname{sh} b};$$

il vient, en définitive,

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z) \sim \frac{P_1(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z}\,\frac{n^{s-1}e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^{s+1}}.$$

Rappelons (n° 89) que le quotient

$$\frac{P_1(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} = \cos(nz - \varphi)$$

atteint $2n - 2$ fois son maximum absolu avec alternance de signes quand z varie de 0 à 2π; nous voyons que notre relation asymptotique entraîne le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction (z réel)*

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

a pour valeur asymptotique

$$\varepsilon_n = \frac{n^{s-1}e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^{s+1}}.$$

Comme seconde application, nous allons déterminer la valeur asymptotique de l'élément simple impair d'ordre s. A cet effet, nous recommençons le calcul précédent, en conservant la même fonction

$$f(z) = \frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s},$$

mais en prenant, à la place de P, le polynome

$$P_2(\cos t) = \frac{T(t) - T(-t)}{2i \sin t}.$$

Le calcul est tout à fait analogue au précédent. Mais, comme $\sin t$ figure au dénominateur de l'expression de P_2, il s'introduit sous le signe d'intégration un facteur $\sin t$ en plus au numérateur, d'où un facteur $\operatorname{sh} b$ en moins au dénominateur du résultat. Il suffit d'indiquer ce résultat, qui est

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_2(\cos z) \sim \frac{P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Multiplions par $\sin z$; il vient

$$\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - \sin z R_2(\cos z) \sim \frac{\sin z P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Or, on a maintenant (n° 89)

$$\frac{\sin z P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} = \sin(nz + \varphi),$$

d'où le théorème suivant :

Théorème II. — *La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction (z réel)*

$$\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

a pour valeur asymptotique

$$\varepsilon_n \sim \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

En combinant les formules d'où découlent les deux théorèmes précédents, on obtient le théorème suivant, exactement comme dans le cas des singularités polaires (n° 89) :

THÉORÈME III. — *La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction (z réel)*

$$\frac{A + B \sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

a pour valeur asymptotique

$$\varrho_n \sim \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}\, \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^{s-1}}.$$

Les expressions précédentes de ϱ_n supposent $\Gamma(s)$ positif. Quand s est négatif, $\Gamma(s)$ peut l'être aussi. Dans ce cas, il faut remplacer, dans les formules précédentes, $\Gamma(s)$ par sa valeur absolue.

Exactement comme dans le cas des singularités polaires, pour n infini, la meilleure approximation est à celle de Fourier dans le rapport

$$\frac{e^b - 1}{2 \operatorname{sh} b} = \frac{1}{1 + e^{-b}}$$

et ce rapport tend vers l'unité quand b croît indéfiniment.

100. Valeur asymptotique de l'approximation minimum dans le cas général. — Soit $f(z)$ une fonction périodique régulière entre les droites $y = \pm b$ et admettant plusieurs couples de points critiques d'ordres déterminés sur ces deux droites.

Nous connaissons (n° 98) l'ordre de l'approximation minimum d'ordre n, mais sa valeur asymptotique ne sera connue que s'il n'y a qu'un seul couple de points critiques distincts sur les droites, ou encore un couple d'ordre s plus élevé que tous les autres. En effet, dans ce cas, on peut isoler le terme principal de $f(z)$ au voisinage de ces points critiques. C'est un élément simple d'ordre s, qui est prépondérant dans la détermination de l'approximation. La valeur asymptotique de l'approximation de $f(z)$ sera la même que pour ce terme principal. Elle sera donc donnée par les théorèmes précédents.

101. Points singuliers logarithmiques. — On peut aussi trouver la valeur asymptotique de la meilleure approximation de la fonction

$$(A + B \sin z)\, \frac{[\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s},$$

dans laquelle m est un entier positif et s un nombre réel quelconque.

Nous ne développerons pas la démonstration; qu'il nous suffise de donner quelques indications sur la marche à suivre. Nous remarquons que cette fonction est, au signe près, la dérivée $m^{\text{ième}}$ par rapport à s de

$$\frac{A + B \sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}.$$

La détermination de la valeur asymptotique de la meilleure approximation de cette fonction dépend du calcul de l'intégrale (6) du n° 94 au lieu de celui de l'intégrale (5). De même que (6) se déduit de (5) par dérivation, de même cette valeur asymptotique se déduit par dérivation de la valeur de ρ_n fournie par le théorème III (n° 99). De là, le théorème suivant :

Si m est un entier positif, la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction

$$(A + B \sin z) \frac{[\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

a pour valeur asymptotique

$$\rho_n \sim \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}\, \frac{n^{s-1} (\log n)^m e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^{s+1}}.$$

Cependant, si s est un entier nul ou négatif $-p$, la formule doit se modifier de la même manière que la formule (6), qui doit se remplacer par (6'). Le théorème est alors le suivant :

La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction

$$(A - B \sin z)(\operatorname{ch} b - \cos z)^p [\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m$$

a pour valeur asymptotique

$$\rho_n \sim \sqrt{A^2 - B^2 \operatorname{sh}^2 b}\, p!\, m (\log n)^{m-1} (\operatorname{sh} b)^{p-1} \frac{e^{-nb}}{n^{p+1}}.$$

Comme cas particuliers intéressants, signalons les deux suivants : Les meilleures approximations d'ordre n des fonctions

$$\log(\operatorname{ch} b - \cos z), \quad (\operatorname{ch} b - \cos z) \log(\operatorname{ch} b - \cos z)$$

ont respectivement pour valeurs asymptotiques :

$$\varepsilon_n \sim \frac{e^{-nb}}{n \operatorname{sh} b}, \qquad \varepsilon_n \sim \frac{e^{-nb}}{n^2}.$$

102. Approximation par polynome. — Les résultats précédents se transforment, par les substitutions du n° 91, en d'autres équivalents, relatifs à la meilleure approximation par un polynome de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$.

D'après cela, si a est une constante réelle > 1, on connaît les valeurs asymptotiques de la meilleure approximation par un polynome de degré n des fonctions

$$\log(a - x), \quad (a - x)\log(a - x)$$

et, plus généralement, de la fonction (m entier, nul ou positif)

$$\frac{[\log(a - x)]^m}{(a - x)^p}.$$

Ce résultat a été donné, pour $m = 0$ et $m = 1$, par M. Bernstein. Cet habile géomètre n'a étudié que la représentation par polynome. L'étude de la représentation trigonométrique nous a conduits à des formules plus générales et plus élégantes; mais, pour les établir, nous n'avions qu'une simple adaptation à faire des procédés analytiques imaginés par M. Bernstein.

CHAPITRE X.

APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE DES FONCTIONS ENTIÈRES.

103. Nous allons maintenant supposer que la fonction périodique $f(z)$ soit holomorphe dans tout le plan. Nous allons montrer que l'ordre d'approximation de $f(x)$ sur l'axe réel dépend, en première analyse, du degré plus ou moins rapide de croissance de $f(z)$ quand z s'éloigne de l'axe réel.

Supposons qu'on ait, pour toute valeur réelle et positive de y,

$$(1) \qquad |f(x \pm yi)| < h e^{\varphi(y)},$$

où h est une constante et $\varphi(y)$ une fonction non décroissante. Le module de $f(z)$, entre les deux droites $y = \pm h$, ne surpasse pas la quantité

$$M = h e^{h\varphi(h)}.$$

Appliquons le théorème II du Chapitre VI. La somme S_n de Fourier donne, sur l'axe réel, une approximation

$$(2) \qquad \rho_n < \frac{2Me^{-nh}}{e^h - 1} = \frac{2h}{e^h - 1} e^{-h[n - \varphi(h)]}.$$

Nous allons déduire quelques conséquences de cette formule.

104. Théorème I. — *Si $\varphi(y)$ est borné et r (entier) quel que soit y, une fonction périodique entière, $f(z)$, qui satisfait à la condition (1), est une expression trigonométrique d'ordre r.*

En effet, nous pouvons poser, dans la relation (2), $n = r$, ensuite faire tendre h vers l'infini; nous trouvons alors $\rho_r = 0$. Ce théorème se ramène aussi aisément au théorème classique de Liouville sous sa forme généralisée.

Écartons dorénavant l'hypothèse que $f(z)$ soit une expression

trigonométrique limitée. Nous supposerons donc que $\varphi(y)$ tend vers l'infini avec y. Il a déjà été entendu que cette fonction est non décroissante.

Nous désignerons par $y = \psi(u)$ la fonction inverse de $u = \varphi(y)$. Il n'y a pas d'ambiguïté si la fonction φ est croissante. S'il y avait des intervalles où $\varphi(y)$ est constant, on ferait disparaître l'ambiguïté de $\psi(u)$ en choisissant la plus petite solution possible. Dans ce cas, φ est la fonction inverse de ψ en choisissant la plus grande solution possible.

105. Théorème II. — *Supposons que la fonction périodique et entière $f(z)$ satisfasse à la condition* (1). *Désignons par ψ la fonction inverse de φ, par λ un nombre arbitraire compris entre* 0 *et* 1. *Alors la somme S_n de Fourier de $f(x)$ donne, sur l'axe réel, une approximation*

$$\rho_n < \frac{2h}{e^{\psi(\lambda n)} - 1} e^{-(1-\lambda)n\psi(\lambda n)}; \tag{3}$$

et l'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$\rho_n < e^{-(1-\lambda)n\psi(\lambda n)}. \tag{4}$$

La formule (3) s'obtient en posant $b = \psi(\lambda n)$ dans la formule (2) et en observant que

$$\varphi[\psi(\lambda n)] = \lambda n.$$

La formule (4) se déduit de (3) en observant que $\psi(\lambda n)$ est infini avec n. Ceci suppose toutefois (si λ dépend de n) que λn soit infini avec n.

On peut faire $\lambda = n^{-\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ dans la formule (4). Donc, *quelque petit que soit ε positif donné, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,*

$$\rho_n < e^{-(1-n^{-\varepsilon})n\psi(n^{1-\varepsilon})}. \tag{5}$$

Observons encore que n^{ε} devient inférieur à tout nombre positif donné η. Donc, *quelque petits que soient ε et η positifs donnés, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,*

$$\rho_n < e^{-(1-\eta)n\psi(n^{1-\varepsilon})}. \tag{6}$$

Voici maintenant un théorème réciproque.

106. Théorème III. — *Si une fonction périodique de x réel, $f(x)$, admet, quel que soit n entier, une représentation trigonométrique T_n, d'ordre n, avec une approximation*

$$\varepsilon_n < h e^{-n\psi(n)},$$

où h est une constante et $\psi(n)$ une fonction non décroissante de n et infinie avec n; alors $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan $z = x + yi$ et, quelque petit que soit ε positif donné, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de y (qui dépend de ε),

$$(7) \qquad |f(x \pm yi)| < e^{(\varphi(y+\varepsilon)+2)} \qquad (y > 0),$$

où φ est la fonction inverse de ψ.

D'abord $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan, en vertu du théorème IV du Chapitre VI (où l'on peut prendre b aussi grand que l'on veut).

Considérons le développement en série, pour x réel,

$$(8) \qquad f(x) = T_2 + (T_3 - T_2) + \ldots + (T_n - T_{n-1}) + \ldots;$$

l'expression trigonométrique d'ordre n

$$T_n - T_{n-1} = (f - T_{n-1}) - (f - T_n)$$

est de module inférieur à

$$2he^{-(n-1)\psi(n-1)}$$

et, par conséquent, sa dérivée d'ordre k est de module inférieur à

$$2hn^k e^{-(n-1)\psi(n-1)}.$$

Il s'ensuit que la série (8) peut être dérivée k fois terme à terme, car la série dérivée converge uniformément; et l'on en conclut

$$\begin{aligned} |f^{k}(x)| &< 2h \sum_{2}^{\infty} n^k e^{-(n-1)\psi(n-1)} \\ &< 2h \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 dt\,(n+t)^k e^{-(n-2+t)\psi(n-2+t)} \\ &< 2h \int_0^\infty dt\,(2+t)^k e^{-t\psi(t)}. \end{aligned}$$

Substituons ces bornes dans le développement

$$f(x \pm yi) = \sum_k \frac{(\pm yi)^k}{k!} f^{(k)}(x);$$

il vient

$$|f(x \pm yi)| \leq h \int_0^\infty dt\, e^{-t\psi(t)} \sum_k \frac{[y(t+2y)]^k}{k!}$$

$$\leq 2h \int_0^\infty dt\, e^{-t\psi(t)} e^{(t+2y)y}$$

$$\leq 2he^{2y} \int_0^\infty e^{ty-\psi(t)}\, dt.$$

Faisons la décomposition en deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{ty-\psi}\, dt = \int_0^{\varphi(y+\varepsilon)} + \int_{\varphi(y+\varepsilon)}^\infty e^{ty-\psi(t)}\, dt$$

Comme φ est l'inverse de ψ, on a

$$\psi[\varphi(y+\varepsilon)] = y+\varepsilon;$$

la seconde intégrale est inférieure à

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\, dt = \frac{1}{\varepsilon};$$

la première intégrale est inférieure à

$$\int_0^{\varphi(y+\varepsilon)} e^{ty}\, dt < \frac{1}{y} e^{y\varphi(y+\varepsilon)}.$$

Il vient donc, quel que soit y positif,

$$|f(x \pm yi)| \leq he^{2y}\left[\frac{1}{y} e^{y\varphi(y+\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

A partir d'une valeur suffisamment grande de y, on a, quelque petit que soit ε donné,

$$e^{y\varphi(y+\varepsilon)} > \frac{y}{\varepsilon},$$

et dès lors

$$|f(x \pm yi)| < \frac{4h}{y} e^{y\varphi(y+\varepsilon)+2y}.$$

La formule de l'énoncé est la conséquence immédiate de celle-ci.

La comparaison des théorèmes précédents conduit à des conséquences intéressantes sur l'ordre de la meilleure approximation. Nous en déduisons, en effet, le théorème suivant :

107. Théorème IV. — *Soit $f(z)$ une fonction périodique, holomorphe dans tout le plan. Désignons par $\varphi(y)$ la plus petite fonction non décroissante de y positif qui satisfait à la condition*

$$|f(x \pm yi)| < e^{y\varphi(y)},$$

et supposons que $\varphi(y)$ croisse à l'infini avec y. Enfin soit ψ la fonction inverse de φ. Alors, quelque petit que soit ε positif donné, la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n de $f(x)$ sur l'axe réel satisfait définitivement à la condition

$$\rho_n < e^{-(1-\varepsilon)n\psi(n)},$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n, tandis qu'elle ne vérifie jamais définitivement la condition

$$\rho_n < e^{-(1+\varepsilon)n\psi(n+2)}.$$

La première condition a été établie précédemment et rentre dans la formule (6). Nous allons montrer que la seconde est la conséquence du théorème précédent.

Si la dernière inégalité avait définitivement lieu, on pourrait assigner une constante h, telle que l'on ait, quel que soit y,

$$\rho_n < he^{-(1+\varepsilon)n\psi(y+2)}.$$

Mais la fonction inverse de

$$(1+\varepsilon)\psi(n+2) = y$$

est

$$n = \varphi\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right) - 2.$$

On conclurait donc de l'inégalité précédente, par le théorème III, que l'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de y,

$$|f(x \pm yi)| < e^{y\varphi\left(\frac{y+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)}.$$

Or ceci est contraire à la définition de φ, car φ pourrait être remplacé par une fonction plus petite $\varphi\left(\frac{y-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION. — Théorèmes de Weierstrass. Généralités..... 1

CHAPITRE I. — Approximation par les séries de Fourier..... 10

CHAPITRE II. — Approximation par les sommes de Fejér..... 26

CHAPITRE III. — Méthode générale propre à abaisser la borne précédemment assignée à l'approximation..... 43

CHAPITRE IV. — Théorèmes réciproques. Propriétés différentielles que suppose un ordre donné d'approximation..... 55

CHAPITRE V. — Approximation par polynomes : réduction à une approximation trigonométrique..... 63

CHAPITRE VI. — Polynome d'approximation minimum..... 74

CHAPITRE VII. — Approximation trigonométrique minimum..... 93

CHAPITRE VIII. — Fonctions analytiques présentant des singularités polaires..... 111

CHAPITRE IX. — Fonctions analytiques présentant certaines singularités polaires (points critiques d'ordre ν)..... 127

CHAPITRE X. — Approximation trigonométrique des fonctions entières..... 146

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
59.55 Quai des Grands-Augustins, 55.

BINDING LIST SEP 15 1931

QA
331
.5
L228

La Vallée Poussin, Charles Jean de
Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY